完全微分方程式 $f(x,y,y',y'')=R(x)$

$f(x,y,y',y'')=R(x)$ が $g(x,y,y')=\int R(x)dx$ を x で微分して得られるとき、これを完全微分方程式という。

例 36　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$x^2yy''+x^2y'^2+4xyy'+y^2=6x$　　(2)　$(x^2+1)y''+4xy'+2y=-\sin x$

(3)　$x(x-1)y''+(3x-2)y'+y=0$

(解) (1) $x^2yy''+x^2y'^2+4xyy'+y^2=6x$ $\cdots$①

ここで

$(x^2yy'+xy^2)'$

$=2x\cdot yy'+x^2\cdot y'\cdot y'+x^2y\cdot y''+1\cdot y^2+x\cdot 2yy'$

$=x^2yy''+x^2y'^2+4xyy'+y^2$

であるから

$$x^2yy'+xy^2=\int 6xdx\cdots②$$

この両辺を x で微分すると①を得る。

よって、②から

$x^2yy'+xy^2=3x^2+a$ (a は任意定数)$\cdots$③

ここで

$(x^2y^2)'=2x\cdot y^2+x^2\cdot 2yy'=2xy^2+2x^2yy'$

であるから

$$\frac{1}{2}x^2y^2=\int(3x^2+a)dx\ \cdots④$$

この両辺を x で微分すると③を得る。

よって、④から

$$\frac{1}{2}x^2y^2=x^3+ax+b\qquad (a,b\text{ は任意定数})$$

$x^2y^2=2x^3+2ax+2b$

$2a=C_1$　,　$2b=C_2$　とおくと

求める一般解は

$x^2y^2=2x^3+C_1x+C_2$ (C_1,C_2は任意定数)　〃

(2)　$(x^2+1)y''+4xy'+2y=-\sin x$ $\cdots$①

ここで

$\{(x^2+1)y'+2xy\}'$

$=2x\cdot y'+(x^2+1)\cdot y''+2\cdot y+2x\cdot y'$

$=(x^2+1)y''+4xy'+2y$

であるから

$$(x^2+1)y'+2xy=\int(-\sin x)dx\cdots②$$

この両辺を x で微分すると①を得る。

よって、②から

$(x^2+1)y'+2xy=\cos x+C_1$ (C_1は任意定数)$\cdots$③

ここで

$\{(x^2+1)y\}'=2x\cdot y+(x^2+1)\cdot y'$

であるから

$$(x^2+1)y=\int(\cos x+C_1)dx\ \cdots④$$

この両辺を x で微分すると③を得る。

よって、④から求める一般解は

$(x^2+1)\,y=\sin x+C_1x+C_2$ (C_1,C_2は任意定数) 〃

(3)　$x(x-1)y''+(3x-2)\,y'+y=0$ $\cdots$①

ここで

$\{(x^2-x)y'+(x-1)y\}'$

$=(2x-1)\cdot y'+(x^2-x)\cdot y''+1\cdot y+(x-1)\cdot y'$

$=x(x-1)y''+(3x-2)y'+y$

であるから

$$x(x-1)y'+(x-1)y=\int 0\,dx\cdots②$$

この両辺を x で微分すると①を得る。

よって、②から

$x(x-1)y'+(x-1)y=C_1$ (C_1は任意定数)$\cdots$③

$$x\neq 1\quad のとき\quad xy'+y=\frac{C_1}{x-1}$$

ここで $(xy)'=1\cdot y+x\cdot y'$　であるから

$$xy=\int\frac{C_1}{x-1}dx\ \cdots④$$

この両辺を x で微分すると③を得る。

よって、④から求める一般解は

$xy=C_1\log|x-1|+C_2$ (C_1,C_2は任意定数)　〃

$x=1$ のときも、

上の解に含まれることを確認してみよ。