完全微分方程式 $f(x,y,y',y'')=R(x)$

$f(x,y,y',y'')=R(x)$ が $g(x,y,y')=\int R(x)dx$ を x で微分して得られるとき、これを完全微分方程式という。

例 37　次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1)　$y''+y'\tan x+\dfrac{2yy'^2}{y^2+1}=0$　　　(2)　$y''\sin 2x+2(1+\cos 2x)\,y'=-2\sin 2x$

(解) (1)　$y''+y'\tan x+\dfrac{2yy'^2}{y^2+1}=0$

両辺を y' で割ると

$$\frac{y''}{y'}+\tan x+\frac{2yy'}{y^2+1}=0\ \cdots ①$$

ここで

$\{\log|y'|-\log|\cos x|+\log(y^2+1)\}'$

$$=\frac{y''}{y'}-\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{2y\cdot y'}{y^2+1}$$

$$=\frac{y''}{y'}+\tan x+\frac{2yy'}{y^2+1}$$

であるから

$$\log|y'|-\log|\cos x|+\log(y^2+1)=\int 0\,dx\cdots ②$$

この両辺を x で微分すると①を得る。

よって、②から

$\log|y'|-\log|\cos x|+\log(y^2+1)=c\ \cdots ③$

(c は任意定数)

$c=\log|a|$　とおくと

$\log|y'|+\log(y^2+1)=\log|a|+\log|\cos x|$

$\log|y'(y^2+1)|=\log|a\cos x|$

$y'(y^2+1)=\pm a\cos x$

$$\frac{dy}{dx}(y^2+1)=\pm a\cos x$$

$$\int(y^2+1)\,dy=\pm a\int\cos x\,dx$$

$$\frac{y^3}{3}+y=\pm a\sin x+b\quad (a,b\text{ は任意定数})$$

$\therefore y^3+3y=\pm 3a\sin x+3b$

$\pm 3a=C_1$，$3b=C_2$　とおくと

求める一般解は

$y^3+3y=C_1\sin x+C_2$　(C_1,C_2は任意定数)　〃

(2)

$y''\sin 2x+2(1+\cos 2x)\,y'=-2\sin 2x\cdots ①$

ここで

$\{y'\sin 2x+2y\}'$

$=y''\cdot\sin 2x+y'\cdot 2\cos 2x+2y'$

$=y''\sin 2x+2(1+\cos 2x)\,y'$

であるから

$$y'\sin 2x+2y=\int(-2\sin 2x)dx\cdots ②$$

この両辺を x で微分すると①を得る。

よって、②から

$y'\sin 2x+2y=\cos 2x+a$　(a は任意定数)

$\therefore y'\cdot 2\sin x\cos x+2y=2\cos^2 x-1+a$

両辺を $\cos^2 x$ で割ると

$$y'\frac{2\sin x}{\cos x}+2y\frac{1}{\cos^2 x}=2-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{a}{\cos^2 x}$$

$$y'\tan x+y\sec^2 x=1+\frac{a-1}{2}\sec^2 x\ \cdots ③$$

ここで

$(y\tan x)'=y'\cdot\tan x+y\cdot\sec^2 x$

であるから

$$y\tan x=\int(1+\frac{a-1}{2}\sec^2 x)dx\ \cdots ④$$

この両辺を x で微分すると③を得る。

よって、④から

$$y\tan x=x+\frac{a-1}{2}\tan x+b$$

(a,b は任意定数)

$\dfrac{a-1}{2}=C_1$，$b=C_2$　とおくと

求める一般解は

$y\tan x=x+C_1\tan x+C_2$　〃

(C_1,C_2は任意定数)