微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.10)$　解答例

1. 曲線 $y = x^3$ と曲線 $y = x^2 + x + c$ との両方に接する直線が 4 本あるような c の値の範囲を求めよ。

（解１）$y = f(x) = x^3 \cdots$①　とおくと、　$f'(x) = 3x^2$　であるから、

① 上の点 (a, a^3) における接線の方程式は

$y - a^3 = f'(a)(x - a)$　　$\therefore y - a^3 = 3a^2(x - a)$　　$\therefore y = 3a^2x - 2a^3 \cdots$②

$y = g(x) = x^2 + x + c \cdots$③　とおくと、　$g'(x) = 2x + 1$　であるから、

③ 上の点 $(b, b^2 + b + c)$ における接線の方程式は

$y - (b^2 + b + c) = g'(b)(x - b)$　　$\therefore y - b^2 - b - c = (2b + 1)(x - b)$　　$\therefore y = (2b + 1)x - b^2 + c \cdots$④

② と ④ が同一な接線となる条件は

$$\begin{cases} 3a^2 = 2b + 1 & \cdots ⑤ \\ -2a^3 = -b^2 + c & \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ より、$b = \dfrac{3a^2 - 1}{2}$　また、⑥ より、$c = b^2 - 2a^3$

$\therefore c = \left(\dfrac{3a^2 - 1}{2}\right)^2 - 2a^3 = \dfrac{9a^4 - 6a^2 + 1}{4} - 2a^3$

$\therefore c = \dfrac{9}{4}a^4 - 2a^3 - \dfrac{3}{2}a^2 + \dfrac{1}{4} \cdots$⑦

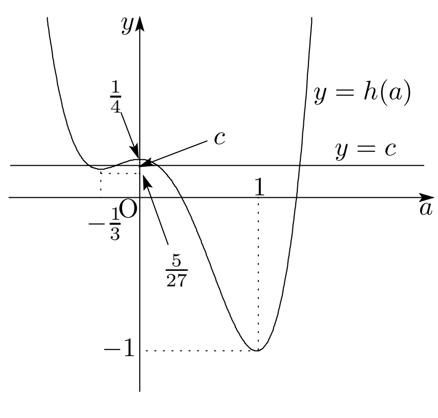
$$\begin{cases} y = h(a) = \dfrac{9}{4}a^4 - 2a^3 - \dfrac{3}{2}a^2 + \dfrac{1}{4} & \cdots ⑧ \\ y = c & \cdots ⑨ \end{cases}$$　とおくと、

$h'(a) = 9a^3 - 6a^2 - 3a = 2a(3a^2 - 2a - 1) = 3a(3a + 1)(a - 1)$

$h'(a) = 0$ から、$a = 0,\ a = -\dfrac{1}{3},\ a = 1$

よって、⑧ すなわち、$y = h(a)$ の増減表をつくると

a	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(a)$	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-1	↗



極小値　$h\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{36} + \dfrac{2}{27} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{27}$

極大値　$h(0) = \dfrac{1}{4}$

極小値　$h(1) = \dfrac{9}{4} - 2 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4} = -1$

よって、⑧ すなわち、$y = h(a)$ のグラフは右図のようになる。

曲線 ① と曲線 ③ の両方に接せる接線が 4 本ある場合は、a の４次方程式 ⑦ が異なる４つの実数解をもつときである。

このとき、⑧ と ⑨ すなわち、曲線 $y = h(a)$ と直線 $y = c$ が異なる４つの共有点をもつから

求める c の範囲は　　$\therefore \dfrac{5}{27} < c < \dfrac{1}{4}$　〃

（解２）$y=f(x)=x^3\cdots①$　とおくと、　$f'(x)=3x^2$　であるから、

① 上の点 (a,a^3) における接線の方程式は

$y-a^3=f'(a)(x-a)$

$\therefore y-a^3=3a^2(x-a)$

$\therefore y=3a^2x-2a^3\cdots②$

また、題意より接線 ② が

$y=x^2+x+c\cdots③$

とも接することから、

$x^2+x+c=3a^2x-2a^3$

$\therefore x^2+(1-3a^2)x+(c+2a^3)=0$

この判別式を D とすると、② が ③ に接する条件は

$D=(1-3a^2)^2-4\cdot(c+2a^3)=1-6a^2+9a^4-4c-8a^3=9a^4-8a^3-6a^2+1-4c=0$

$\therefore 9a^4-8a^3-6a^2+1=4c$

$\therefore \dfrac{9}{4}a^4-2a^3-\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{1}{4}=c\cdots④$

$$\begin{cases} y=g(a)=\dfrac{9}{4}a^4-2a^3-\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{1}{4} & \cdots⑤ \\ y=c & \cdots⑥ \end{cases}$$

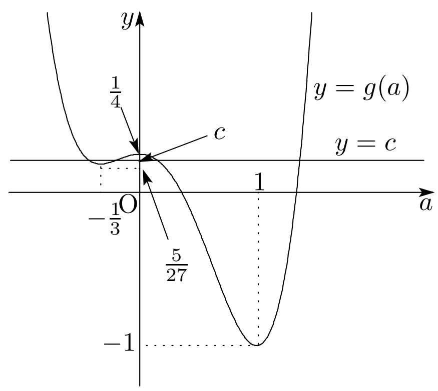
とおくと、

$g'(a)=9a^3-6a^2-3a=2a(3a^2-2a-1)=3a(3a+1)(a-1)$

$g'(a)=0$ から、$a=0,\ a=-\dfrac{1}{3},\ a=1$

よって、⑤ すなわち、$y=g(a)$ の増減表をつくると

a	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(a)$	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	-1	↗



極小値　$g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{36}+\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{27}$

極大値　$g(0)=\dfrac{1}{4}$

極小値　$g(1)=\dfrac{9}{4}-2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=-1$

よって、⑤ すなわち、$y=g(a)$ のグラフは右図のようになる。

曲線 ① と曲線 ③ の両方に接せる接線 ② が 4 本ある場合は、a の４次方程式 ④ が

異なる４つの実数解をもつときである。

このとき、⑤ と ⑥ すなわち、曲線 $y=g(a)$ と直線 $y=c$ が異なる４つの共有点をもつから

求める c の範囲は　　$\therefore \dfrac{5}{27}<c<\dfrac{1}{4}$　〃

2. 関数 $y = 4\sin 2x(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\sin(x + 45°)$ の $0° \leqq x < 180°$ における最大値と最小値を求めよ。

（解１）$y = 4\sin 2x(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\sin(x + 45°) \cdots ①$

$\sin x + \cos x = t \cdots ②$　とおくと　$(\sin x + \cos x)^2 = t^2$

$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$

$\therefore 2\sin x\cos x = t^2 - 1$

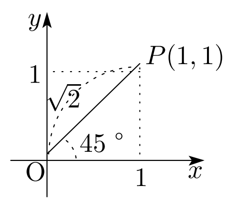
よって、２倍角の公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ より

$\sin 2x = t^2 - 1 \cdots ③$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$= \sqrt{2}(\sin x\cos 45° + \cos x\sin 45°) = \sqrt{2}\sin(x + 45°)$

《合成の仕方：考え方：下図を参考》



これと ② から

$t = \sqrt{2}\sin(x + 45°) \cdots ④$

②, ③, ④ を ① に代入して

$y = 4(t^2 - 1)t + t$

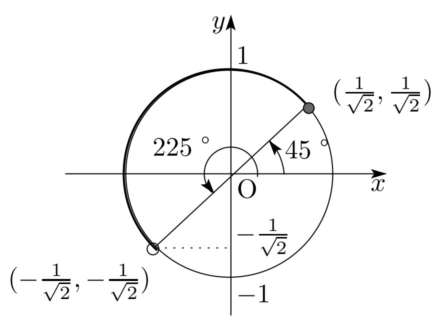
$\therefore y = 4t^3 - 3t \cdots ⑤$

$y' = 12t^2 - 3 = 3(4t^2 - 1) = 3(2t + 1)(2t - 1)$

$y' = 0$ とおくと、　$t = -\frac{1}{2},\ t = \frac{1}{2}$

$t = \sqrt{2}\sin(x + 45°)$ おいて、　$0° \leqq x < 180°$ より、　$45° \leqq x + 45° < 225°$

$\sin\theta$ の値は単位円の y 座標であるから、



$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin(x + 45°) \leqq 1$　　$-1 < \sqrt{2}\sin(x + 45°) \leqq \sqrt{2}$　　$\therefore -1 < t \leqq \sqrt{2}$

よって、$-1 < t \leqq \sqrt{2}$ の範囲で ⑤ の増減表をつくると

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	(-1)	↗	1	↘	-1	↗	$5\sqrt{2}$

$t = -1$ のとき　$y = -4 + 3 = -1$

$t = -\frac{1}{2}$ のとき　$y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

$t = \frac{1}{2}$ のとき　$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

$t = \sqrt{2}$ のとき　$y = 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

ゆえに求める解は

$\begin{cases} \text{最大値} & 5\sqrt{2} \\ \text{最小値} & -1 \end{cases}$ 〃

（解 2）$y = 4\sin 2x(\sin x + \cos x) + \sqrt{2}\sin(x + 45°) \cdots ①$

$\sin x + \cos x = t \cdots ②$　とおくと

$(\sin x + \cos x)^2 = t^2$

$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$

$\therefore 2\sin x\cos x = t^2 - 1$

よって、２倍角の公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ より

$\sin 2x = t^2 - 1 \cdots ③$

$\sqrt{2}\sin(x + 45°)$

$= \sqrt{2}(\sin x\cos 45° + \cos x\sin 45°)$

$= \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

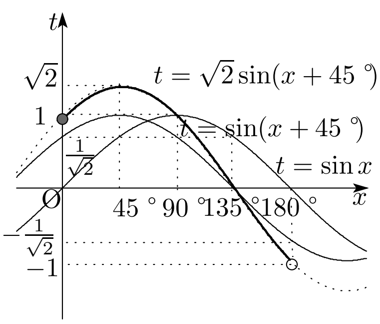
$= \sin x + \cos x = t$

$\therefore t = \sqrt{2}\sin(x + 45°) \cdots ④$

$t = \sin x$ を x 軸方向に $-45°$ 平行移動すると、$t = \sin(x + 45°)$ となり、

$t = \sin(x + 45°)$ を t 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍すると、$t = \sqrt{2}\sin(x + 45°)$ となる。

よって、$0° \leqq x < 180°$ の範囲における ④ のグラフは、次の太線部分である。



$\therefore -1 < t \leqq \sqrt{2}$

②, ③, ④ を ① に代入して

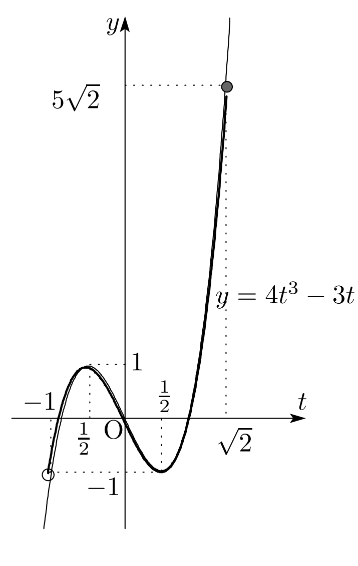
$y = 4(t^2 - 1)t + t$　　$\therefore y = 4t^3 - 3t \cdots ⑤$

$y' = 12t^2 - 3 = 3(4t^2 - 1) = 3(2t + 1)(2t - 1)$

$y' = 0$ とおくと、$t = -\dfrac{1}{2},\ t = \dfrac{1}{2}$

よって、$-1 < t \leqq \sqrt{2}$ の範囲で ⑤ の増減表をつくると

t	(-1)	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	(-1)	↗	1	↘	-1	↗	$5\sqrt{2}$



ゆえに求める解は

$\begin{cases} \text{最大値}\quad 5\sqrt{2} \\ \text{最小値}\quad -1 \end{cases}$ 〃