微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.1)$　解答例

1. 関数 $f(x)=x^3-x+1$ は閉区間 $[-1,0]$ で連続、開区間 $(-1,0)$ で微分可能であり、さらに $f(-1)=f(0)$ であるから、

ロルの定理　$f'(c)=0$, $-1<c<0$　を満たす c が少なくとも 1 つ存在する。c の値を求めよ。

（解）$f'(x)=3x^2-1$　　$\therefore f'(c)=3c^2-1=0$

$\therefore 3c^2=1$　　$\therefore c^2=\dfrac{1}{3}$　　$\therefore c=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このうち、$-1<c<0$ を満たすものを求めて、$c=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　〃

≪確認≫ $f(-1)=(-1)^3-(-1)+1=-1+1+1=1$
$f(0)=0^3-0+1=1$　$\therefore f(-1)=f(0)$

2. 関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は閉区間 $[1,4]$ で連続、開区間 $(1,4)$ で微分可能であるから、

平均値の定理　$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$, $1<c<4$　を満たす c が少なくとも 1 つ存在する。

c を求めよ。

（解）$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{3}=\dfrac{2-1}{3}=\dfrac{1}{3}$

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　$\therefore f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$

よって　$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$　　$\therefore 3=2\sqrt{c}$　　$\therefore \dfrac{3}{2}=\sqrt{c}$　　$\therefore \left(\sqrt{c}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$　　$\therefore c=\dfrac{9}{4}$

これは、$1<c<4$ を満たす。　$\therefore c=\dfrac{9}{4}$　〃

3. 関数 $f(x)=x^2+2x$ は閉区間 $[1,3]$ で連続、開区間 $(1,3)$ で微分可能であるから、

平均値の定理　$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1+\theta h)$, $0<\theta<1$　を満たす θ が少なくとも 1 つ存在する。
θ を求めよ。

（解）$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\{(1+h)^2+2(1+h)\}-(1^2+2\cdot 1)}{h}=\dfrac{1+2h+h^2+2+2h-3}{h}$

$=\dfrac{4h+h^2}{h}=\dfrac{h(4+h)}{h}=4+h$

$f'(x)=2x+2$ より　$f'(1+\theta h)=2(1+\theta h)+2=4+2\theta h$

$\therefore 4+h=4+2\theta h$　　$\therefore h=2\theta h$　　ここで　$h\neq 0$ であるから　　$\therefore \theta=\dfrac{1}{2}$

これは、$0<\theta<1$ を満たす。　$\therefore \theta=\dfrac{1}{2}$　〃

4. 次の各問いに答えよ。

(1) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\, x^3 + \mathrm{Cos}^{-1}\, x^3$ を微分せよ。

（解）$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot (x^3)' + \left\{ -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \right\} \cdot (x^3)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2$

$= \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} - \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = 0$　〃

(2) $\mathrm{Sin}^{-1}\, x^3 + \mathrm{Cos}^{-1}\, x^3$ の値を求めよ。

（解）(1) の結果より $f'(x) = 0$、よって $f(x)$ は <u>定数関数</u> であるから

$f(x) = f(1) = \mathrm{Sin}^{-1}\, 1^3 + \mathrm{Cos}^{-1}\, 1^3 = \mathrm{Sin}^{-1}\, 1 + \mathrm{Cos}^{-1}\, 1 = \dfrac{\pi}{2} + 0 = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \mathrm{Sin}^{-1}\, x^3 + \mathrm{Cos}^{-1}\, x^3 = \dfrac{\pi}{2}$　〃

（別解）(1) の結果よりり $f'(x) = 0$、よって $f(x)$ は <u>定数関数</u> であるから

$f(x) = f(0) = \mathrm{Sin}^{-1}\, 0 + \mathrm{Cos}^{-1}\, 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \mathrm{Sin}^{-1}\, x^3 + \mathrm{Cos}^{-1}\, x^3 = \dfrac{\pi}{2}$　〃

5. 次の各問いに答えよ。

(1) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\, 3x + \mathrm{Tan}^{-1}\, (-3x)$ を微分せよ。

（解）$f'(x) = \dfrac{1}{1+(3x)^2} \cdot (3x)' + \dfrac{1}{1+(-3x)^2} \cdot (-3x)' = \dfrac{1}{1+9x^2} \cdot 3 + \dfrac{1}{1+9x^2} \cdot (-3)$

$= \dfrac{3}{1+9x^2} - \dfrac{3}{1+9x^2} = 0$　〃

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\, 3x + \mathrm{Tan}^{-1}\, (-3x)$ の値を求めよ。

（解）(1) の結果よりり $f'(x) = 0$、よって $f(x)$ は <u>定数関数</u> であるから

$f(x) = f(\frac{1}{3}) = \mathrm{Tan}^{-1} \left(3 \cdot \dfrac{1}{3}\right) + \mathrm{Tan}^{-1} \left(-3 \cdot \dfrac{1}{3}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\, 1 + \mathrm{Tan}^{-1}\, (-1)$

$= \dfrac{\pi}{4} + \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\therefore \mathrm{Tan}^{-1}\, 3x + \mathrm{Tan}^{-1}\, (-3x) = 0$　〃

（別解）(1) の結果よりり $f'(x) = 0$、よって $f(x)$ は <u>定数関数</u> であるから

$f(x) = f(0) = \mathrm{Tan}^{-1}\, 0 + \mathrm{Tan}^{-1}\, 0 = 0 + 0 = 0$

$\therefore \mathrm{Tan}^{-1}\, 3x + \mathrm{Tan}^{-1}\, (-3x) = 0$　〃