微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.2)$　解答例

1. 次の関数の増減を調べよ。

(1) $y = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

（解）$y' = 4x^3 + 12x^2 + 8x = 4x(x^2 + 3x + 2) = 4x(x+1)(x+2)$

$y' = 0$ から　$x = -2\ ,\ -1\ ,\ 0$

増減表をつくると

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

よって, $x < -2\ ,\ -1 < x < 0$ のとき 減少、
$-2 < x < -1\ ,\ 0 < x$ のとき 増加である。　〃

(2) $y = x^4 + 4x$

（解）$y' = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) = 4(x+1)(x^2 - x + 1)$

ここで、$x^2 - x + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であるから

$y' = 0$ から　$x = -1$

増減表をつくると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$

よって、$x < -1$ のとき　減少、
$-1 < x$ のとき　増加　である。　〃

2. 次の関数の極値を求め、グラフの概形をかけ。

(1) $y = x^3 - 3x - 2$

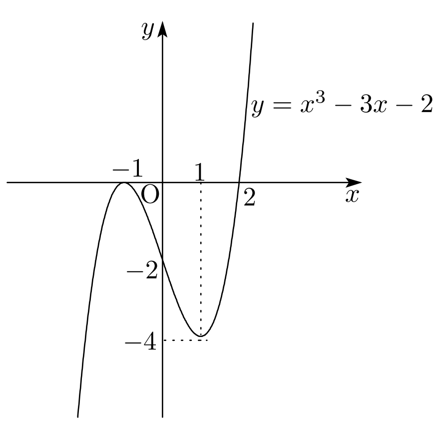
（解）$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ から　$x = -1\ ,\ 1$

増減表をつくると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

よって、$x - 1$ のとき　極大値 0
$x = 1$ のとき　極小値 -4　をとる。　〃



(2) $y = x + \dfrac{1}{x}$

（解）$y = x + \dfrac{1}{x} = x + x^{-1}$

$y' = 1 + (-1)x^{-1-1} = 1 - x^{-2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

$y' = 0$ から　$x = -1$, 1　　また、$x = 0$ では、y , y' は定義されていないから

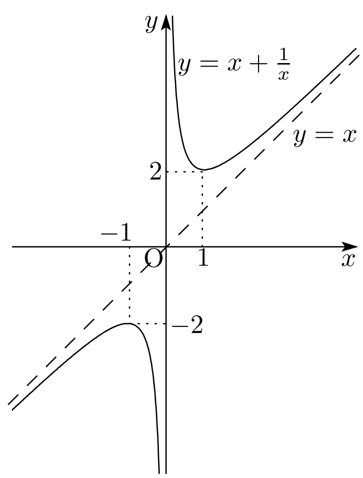
増減表をつくると　　（ 直線 $x = 0$ が漸近線になる。）

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↗	-2	↘	／	↘	2	↗

よって、$x = -1$ のとき　極大値 -2　　$x = 1$ のとき　極小値 2　をとる。　〃

$y = x + \dfrac{1}{x}$ と $y = x$ の差をとり、$x \to \pm\infty$ の極限値をとると

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - x\right\} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$　　よって、$y = x$ は漸近線である。



3. 関数 $y = x^4 - 2x^2 + a$ の極大値が正、極小値が負となるように、定数 a の範囲を定めよ。

（解）$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 4x(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ から　$x = -1$, 0 , 1

増減表をつくると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	$a-1$	↗	a	↘	$a-1$	↗

よって、$x = 0$ のとき　極大値 a、

$x = \pm 1$ のとき　極小値 $a - 1$　をとる。

条件より、極大値は正、極小値は負であるから

$$\begin{cases} a > 0 \\ a - 1 < 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} a > 0 \\ a < 1 \end{cases} \qquad \therefore 0 < a < 1 \quad 〃$$