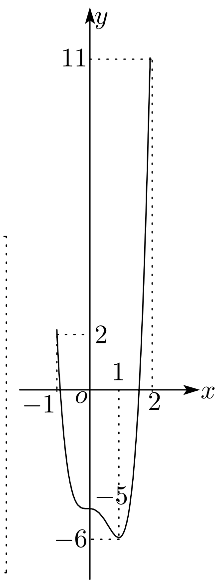
微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　($No.3$)　解答例

1. 次の関数の（　）内の区間における最大値、最小値を求めよ。



(1) $y = 3x^4 - 4x^3 - 5 \qquad (-1 \leqq x \leqq 2)$

（解）$y' = 3 \cdot 4x^{4-1} - 4 \cdot 3x^{3-1} = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

$y' = 0$ とおくと、$12x^2(x-1) = 0 \quad \therefore x = 0$（重解）$, x = 1$

区間 $[-1, 2]$ で増減表を作ると

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	11

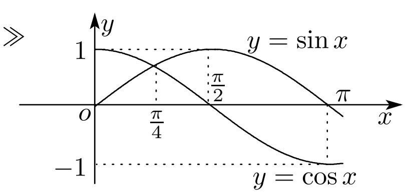
(注) 重解の前後は符号は変わらない

≪計算≫
$x = -1$ のとき
$y = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 5 = 2$
$x = 0$ のとき　　$y = -5$
$x = 1$ のとき
$y = 3 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 5 = -6$
$x = 2$ のとき
$y = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 5 = 11$

$$\begin{cases} x = 2 \text{ のとき　最大値 } 11 \\ x = 1 \text{ のとき　最小値 } -6 \end{cases} \quad〃$$

(2) $y = \sin x + \cos x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$

≪参考図≫



（解）$y' = \cos x - \sin x$

$y' = 0$ とおくと　$\cos x - \sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow$

$\therefore \cos x = \sin x$

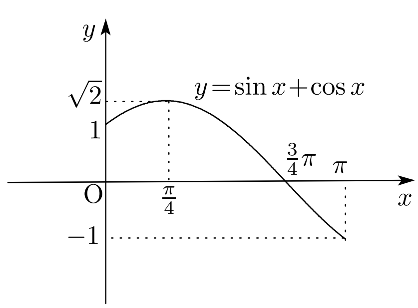
$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$x = \dfrac{\pi}{4}$

区間 $[0, \pi]$ で増減表を作ると

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1

≪計算≫
$x = 0$ のとき
$y = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$
$x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき
$y = \sin \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
$x = \pi$ のとき
$y = \sin \pi + \cos \pi = 0 + (-1) = -1$

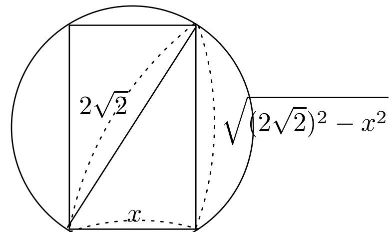
$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \text{ のとき 最大値} \sqrt{2} \\ x = \pi \text{ のとき 最小値 } -1 \end{cases} \quad〃$$



2. 半径 $\sqrt{2}$ の円に内接する長方形の一辺の長さを x、面積を S とするとき、次の問に答えよ。

(1) S を x で表せ。

（解）$S = x\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - x^2} = x\sqrt{8 - x^2}\ (0 < x < 2\sqrt{2})$ 〃



(2) 面積 S の最大値を求めよ。

（解）$S' = (x)' \cdot \sqrt{8 - x^2} + x \cdot (\sqrt{8 - x^2})'$

$= 1 \cdot \sqrt{8 - x^2} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{8 - x^2}}(8 - x^2)'$

$= \sqrt{8 - x^2} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{8 - x^2}} \cdot (-2x)$

$= \sqrt{8 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \dfrac{(\sqrt{8 - x^2})^2 - x^2}{\sqrt{8 - x^2}}$

$= \dfrac{(8 - x^2) - x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \dfrac{8 - 2x^2}{\sqrt{8 - x^2}} = \dfrac{-2(x^2 - 4)}{\sqrt{8 - x^2}}$

$= \dfrac{-2(x + 2)(x - 2)}{\sqrt{8 - x^2}}$

$S' = 0$ とおくと、条件 $0 < x < 2\sqrt{2}$ より　$x = 2$

≪準公式≫

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

$\boxed{\left\{\sqrt{f(x)}\right\}' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)}$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	4	↘	

≪計算≫

$x = 2$ のとき

$S = 2\sqrt{8 - 2^2} = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$

よって、面積 S の最大値は 4 である。　〃

3. x の実数全体について、$e^x \geqq 1 + x$ が成り立つことを証明せよ。

（解）$y = e^x - 1 - x$ とおくと　$y' = e^x - 0 - 1 = e^x - 1$

$y' = 0$ とおくと　$e^x = 1$　$\therefore e^x = e^0$　$\therefore x = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗

$x = 0$ のとき

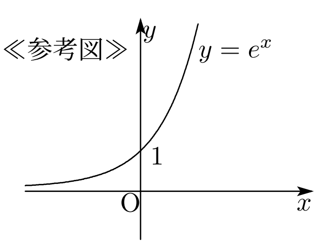
$y = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 - 0 = 0$

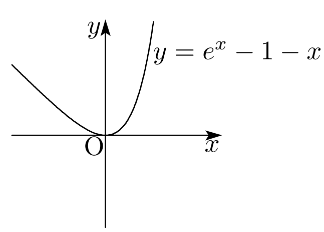
表より、$x = 0$ のとき　y の最小値は 0 であるから

x の実数全体について　$y \geqq 0$　すなわち　$e^x - 1 - x \geqq 0$

よって、x の実数全体について　$e^x \geqq 1 + x$ は成り立つ。　〃

≪参考図≫





$x < 0$ のとき　$e^x < 1$

$x > 0$ のとき　$e^x > 1$