微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.4)$　解答例

1. 次の関数の第 2 次導関数を求めよ。

(1) $y = \sin x$

（解）$y' = \cos x$　　$y'' = -\sin x$　〃

(2) $y = (3x-4)^5$

（解）$y' = 5(3x-4)^{5-1} \cdot (3x-4)' = 5(3x-4)^4 \cdot 3 = 15(3x-4)^4$

$y'' = 15 \cdot 4(3x-4)^{4-1} \cdot (3x-4)' = 60(3x-4)^3 \cdot 3 = 180(3x-4)^3$　〃

2. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y = e^{3x}$

（解）$y' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

$y'' = 3 \cdot e^{3x} \cdot (3x)' = 3 \cdot e^{3x} \cdot 3 = 3^2 e^{3x}$

$y''' = 3^2 \cdot e^{3x} \cdot (3x)' = 3^2 \cdot e^{3x} \cdot 3 = 3^3 e^{3x}$

$y^{(4)} = 3^3 \cdot e^{3x} \cdot (3x)' = 3^3 \cdot e^{3x} \cdot 3 = 3^4 e^{3x}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$y^{(n)} = 3^n e^{3x}$　〃

(2) $y = x^n$　（ただし、n は正の整数とする。）

（解 1）$y' = nx^{n-1}$

$y'' = n \cdot (n-1)x^{(n-1)-1} = n(n-1)x^{n-2}$

$y''' = n(n-1) \cdot (n-2)x^{(n-2)-1} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$y^{(4)} = n(n-1)(n-2) \cdot (n-3)x^{(n-3)-1} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{n-n} = n! \cdot x^0 = n! \cdot 1 = n!$ 〃

（解 2）$y' = nx^{n-1} = {}_nP_1 x^{n-1}$

$y'' = n(n-1)x^{n-2} = {}_nP_2 x^{n-2}$

$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3} = {}_nP_3 x^{n-3}$

$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} = {}_nP_4 x^{n-4}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$y^{(n)} = {}_nP_n x^{n-n} = n! \cdot x^0 = n! \cdot 1 = n!$ 〃

（解 3）$n = 1$ のとき $y = x$　$\therefore y' = 1 = 1!$

$n = 2$ のとき $y = x^2$　$\therefore y' = 2x$　$\therefore y'' = 2 = 2 \cdot 1 = 2!$

$n = 3$ のとき $y = x^3$　$\therefore y' = 3x^2$　$\therefore y'' = 3 \cdot 2x$　$\therefore y''' = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$y^{(n)} = n!$　〃

3. 曲線 $y = xe^x$ の凹凸を調べ、その変曲点を求めよ。

（解）$y' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x)e^x$

$y'' = (1+x)' \cdot e^x + (1+x) \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = (2+x)e^x$

$y'' = 0$ から　$(2+x)e^x = 0$　$\therefore x = -2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	$\frown$	$-\dfrac{2}{e^2}$	$\smile$

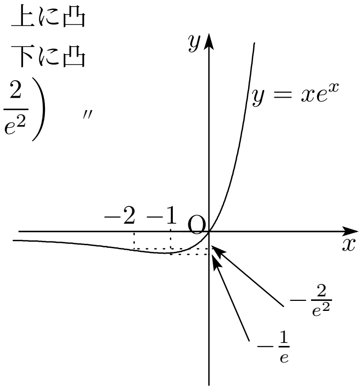
$x = -2$　のとき

$y = -2e^{-2} = -2 \cdot \dfrac{1}{e^2} = -\dfrac{2}{e^2}$

よって、表より
$$\begin{cases} x < -2 \text{ のとき　上に凸} \\ x > -2 \text{ のとき　下に凸} \\ \text{変曲点は} \left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right) \quad // \end{cases}$$

≪参考≫

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗



$x = -t$ とおくと

$x \to -\infty$ のとき $t \to \infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} xe^x$

$\displaystyle = \lim_{t\to\infty}(-te^{-t}) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)$

$\displaystyle = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{e^t}\right) = 0$

直線 $y = 0$ が漸近線である。

4. 次の曲線の増減、極値、グラフの凹凸、変曲点を調べ、グラフの概形をかけ。

$y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

（解）$y' = \dfrac{(x^2)' \cdot (1+x^2) - x^2 \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

$y'' = \dfrac{(2x)' \cdot (1+x^2)^2 - 2x\{(1+x^2)^2\}'}{\{(1+x^2)^2\}^2} = \dfrac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2)^{2-1} \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^4}$

$= \dfrac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{2(1+x^2)\{(1+x^2) - 4x^2\}}{(1+x^2)^4} = \dfrac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$

$= \dfrac{-6\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)}{(1+x^2)^3} = \dfrac{-6\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{(1+x^2)^3}$

$y' = 0$ から　$x = 0$　　$y'' = 0$ から　$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	$\dfrac{1}{4}$	↘	0	↗	$\dfrac{1}{4}$	↗

≪計算≫

$x = 0$ のとき　$y = 0$

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

$y = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

よって、$x = 0$ のとき極小値 0 をとり、変曲点は $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{4}\right)$ である。

グラフは y 軸に関して対称であり、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$ であるから、

直線 $y = 1$ は漸近線である。