微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト $(No.5)$ 解答例

1. 媒介変数によって表される次の曲線をかけ。

(1) $x = 4\cos t \quad , \quad y = 4\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \frac{3}{2}\pi)$

(解) $x^2 + y^2 = (4\cos t)^2 + (4\sin t)^2 = 16\cos^2 t + 16\sin^2 t$

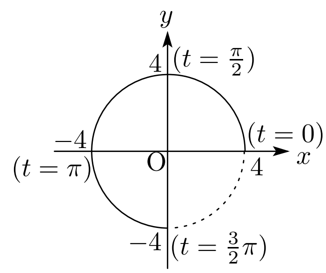
$= 16(\cos^2 t + \sin^2 t) = 16 \cdot 1 = 16$

$\therefore x^2 + y^2 = 4^2 \ \cdots$ ①

よって、

円①の一部分である。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
x	4	$\cdots$	0	$\cdots$	-4	$\cdots$	0
y	0	$\cdots$	4	$\cdots$	0	$\cdots$	-4



したがって、求めるグラフは図の実線の部分である。

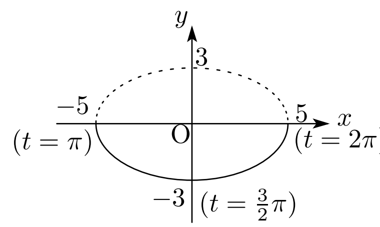
(2) $x = 5\cos t \quad , \quad y = 3\sin t \qquad (\pi \leqq t \leqq 2\pi)$

(解) $\dfrac{x}{5} = \cos t$, $\dfrac{y}{3} = \sin t$

$\left(\dfrac{x}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$\therefore \dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \ \cdots$ ②

t	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
x	-5	$\cdots$	0	$\cdots$	5
y	0	$\cdots$	-3	$\cdots$	0



よって、楕円②の一部分である。したがって、求めるグラフは図の実線の部分である。

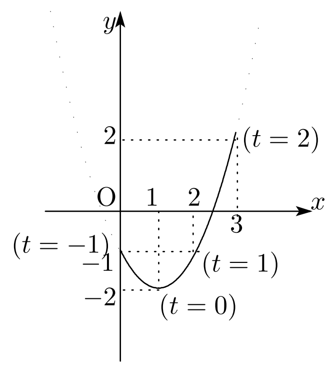
(3) $x = t + 1 \quad , \quad y = t^2 - 2 \qquad (-1 \leqq t \leqq 2)$

(解) $t = x - 1$ より

$y = (x-1)^2 - 2 \ \cdots$ ③

よって、頂点が $(1, -2)$ の放物線③の一部分である。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y	-1	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2



したがって、求めるグラフは図の実線の部分である。

2. x, y の関数が、次のように媒介変数 t を用いて表されているとき、$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。ただし、a は定数とする。

$x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t)$

(解) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\{a(1-\cos t)\}'}{\{a(t-\sin t)\}'} = \frac{a\{0-(-\sin t)\}}{a(1-\cos t)} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \quad /\!/$$

3. x, y の関数が、次のように媒介変数 t を用いて表されているとき、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

$x = t^3 \quad , \quad y = t^4$

(解) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t^4)'}{(t^3)'} = \frac{4t^3}{3t^2} = \frac{4}{3}t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{4}{3}t\right)'}{(t^3)'} = \frac{\frac{4}{3}}{3t^2} = \frac{4}{9t^2} \quad /\!/$$