微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.6)$　解答例

1. 次の曲線の (　) 内の x に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(1) $y = \sin x$　　($x = \pi$)

（解）$y' = \cos x$

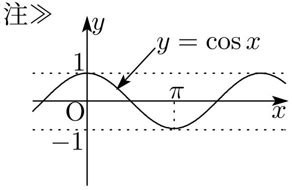
$\left(y\right)_{x=\pi} = \sin\pi = 0$

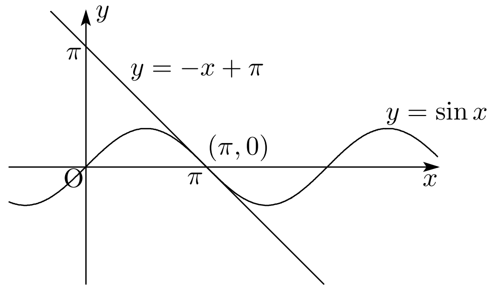
$\left(y'\right)_{x=\pi} = \cos\pi = -1$

よって、点 $(\pi, 0)$ における接線の方程式は

$y - 0 = -1(x - \pi)$　　$\therefore y = -x + \pi$　〃

≪注≫





(2) $y = \log x$　　($x = e$)

（解）$y' = \dfrac{1}{x}$

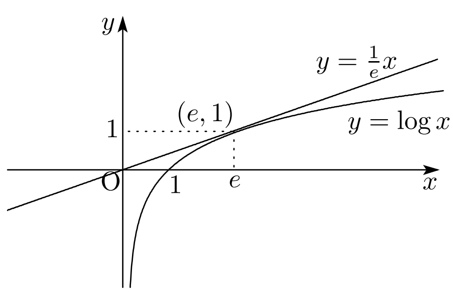
$\left(y\right)_{x=e} = \log e = 1$

$\left(y'\right)_{x=e} = \dfrac{1}{e}$

よって、点 $(e, 1)$ における接線の方程式は

$y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e)$　　$\therefore y = \dfrac{1}{e}x - 1 + 1$　　$\therefore y = \dfrac{1}{e}x$　〃

≪注≫
微分法で底を省略してある対数は
底を e とする自然対数であるから
$\log e = \log_e e = 1$



2. 次の曲線の接線のうち、傾きが -3 であるものの方程式を求めよ。

$y = x^3 + 3x^2$

（解）$y' = 3x^2 + 6x$

条件より傾きが -3 であるから、$y' = 3x^2 + 6x = -3$ とおくと

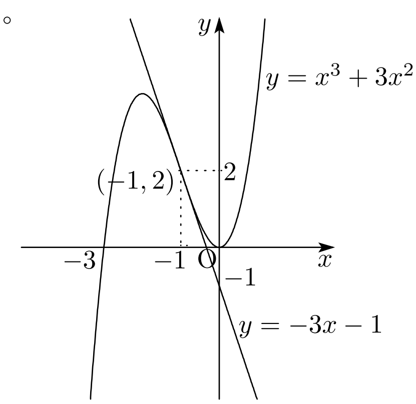
$3x^2 + 6x + 3 = 0$　　$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$

$\therefore (x + 1)^2 = 0$　　$\therefore x = -1$

$\left(y\right)_{x=-1} = (-1)^3 + 3(-1)^2 = -1 + 3 = 2$

よって、点 $(-1, 2)$ における接線の方程式は

$y - 2 = -3\{x - (-1)\}$　　$\therefore y = -3x - 3 + 2$　　$\therefore y = -3x - 1$　〃



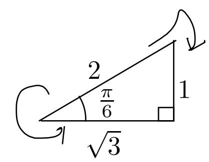
3. 次の媒介変数で表される曲線上の $t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

$x=\sin t$,　$y=\cos^2 t$

（解）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\{(\cos t)^2\}'}{(\sin t)'}=\frac{2\cos t\cdot(\cos t)'}{\cos t}=\frac{2\cos t\cdot(-\sin t)}{\cos t}=-2\sin t$$

$$\Big(x\Big)_{t=\frac{\pi}{6}}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$



$$\Big(y\Big)_{t=\frac{\pi}{6}}=\cos^2\frac{\pi}{6}=\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{6}}=-2\sin\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{1}{2}=-1$$

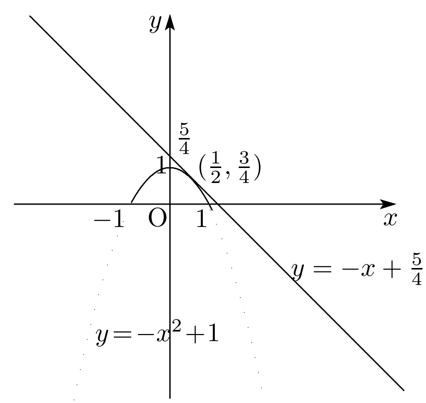
よって、$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点 $\left(\dfrac{1}{2}\,,\,\dfrac{3}{4}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{3}{4}=-1\left(x-\frac{1}{2}\right)\quad\therefore y=-x+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\quad\therefore y=-x+\frac{5}{4}\quad〃$$

≪参考≫ $y+x^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$

$\therefore y=-x^2+1$

$-1\leqq\sin t\leqq 1$ より $\therefore -1\leqq x\leqq 1$



4. 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(1,1)$ における 法線 の方程式を求めよ。

（解）$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

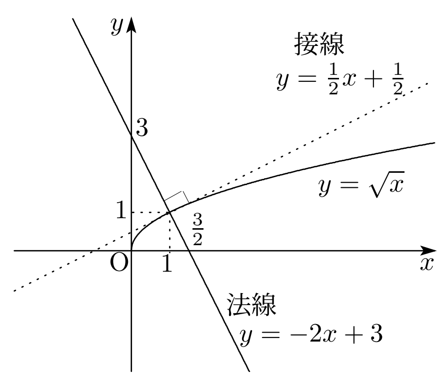
$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

よって、点 $(1,1)$ における接線の傾きは

$$\Big(y'\Big)_{x=1}=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

よって、点 $(1,1)$ における法線の傾きを m とすると

垂直条件より　$\dfrac{1}{2}\cdot m=-1$　$\therefore m=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=-2$



よって、点 $(1,1)$ における法線の方程式は

$$y-1=-2(x-1)\qquad\therefore y=-2x+2+1\qquad\therefore y=-2x+3\quad〃$$

≪参考≫　接線の方程式は　$y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$　$\therefore y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}+1$　$\therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$