微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.7)$　解答例

1. 次の極限値を求めよ。

《ロピタルの定理の活用》　$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形の場合は、分母、分子をそれぞれ微分すること。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{-2x^2+8x-6}{x^2-2x-3}$　　≪参考≫ $\dfrac{0}{0}$ の不定形

（解） $$\lim_{x\to3}\frac{-2x^2+8x-6}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(-2x^2+8x-6)'}{(x^2-2x-3)'}=\lim_{x\to3}\frac{-4x+8}{2x-2}=\frac{-4\cdot3+8}{2\cdot3-2}=\frac{-4}{4}=-1 \quad 〃$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}}$　　≪参考≫ $\dfrac{0}{0}$ の不定形

（解） $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(e^x-e^{-x})'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{e^x-e^{-x}\cdot(-x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{e^x-e^{-x}\cdot(-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}=\frac{\cos0}{e^0+e^0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \quad 〃$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^3}$　　≪参考≫ $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形

（解） $$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3}=0 \quad 〃$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{x}$　　≪参考≫ $\dfrac{0}{0}$ の不定形

（解） $$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{Tan}^{-1}\,x)'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+0}=1 \quad 〃$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3e^{-x}$　　≪参考≫ $\infty\cdot0$ の形　$\Longrightarrow$　$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形に直す

（解） $$\lim_{x\to\infty}x^3e^{-x}=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0 \quad 〃$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2\log x$　　≪参考≫ $0\cdot(-\infty)$ の形　$\Longrightarrow$　$\dfrac{-\infty}{\infty}$ の不定形に直す

（解） $$\lim_{x\to+0}x^2\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-2}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-2})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-2-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{-2}=0 \quad 〃$$

2. 数直線上を運動する点 P の座標 x が時刻 t の関数として $x = a\cos\omega t$（a, ω は定数）で表されるとき、次の問に答えよ。

(1) t 秒後の点 P の速度 v、加速度 α を求めよ。

（解）$x = a\cos\omega t$

$$v = \frac{dx}{dt} = (a\cos\omega t)' = a(-\sin\omega t)\cdot(\omega t)' = -a\sin\omega t\cdot\omega = -a\omega\sin\omega t \quad 〃$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = (-a\omega\sin\omega t)' = -a\omega\cdot\cos\omega t\cdot(\omega t)' = -a\omega\cos\omega t\cdot\omega = -a\omega^2\cos\omega t \quad 〃$$

(2) $x = 5$ のときの加速度を求めよ。

（解）$\alpha = -\omega^2\cdot a\cos\omega t = -\omega^2 x$

$$\Big(\alpha\Big)_{x=5} = -\omega^2\cdot 5 = -5\omega^2 \quad 〃$$

3. x 軸上の動点 P の原点を出発してから t 秒後の x 座標が $x = t^3 - 9t^2 + 24t$ であるとき、次の問に答えよ。

(1) t 秒後の点 P の速度 v、加速度 α を求めよ。

（解）$x = t^3 - 9t^2 + 24t$

$$v = \frac{dx}{dt} = (t^3 - 9t^2 + 24t)' = 3t^2 - 9\cdot 2t + 24\cdot 1 = 3t^2 - 18t + 24 \quad 〃$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = (3t^2 - 18t + 24)' = 3\cdot 2t - 18\cdot 1 + 0 = 6t - 18 \quad 〃$$

(2) 点 P は運動の向きを２度変える。それは何秒後と何秒後か。また、そのときの x 座標を求めよ。

（解）$v = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t-2)(t-4)$

$v = 0$ とおくと、$3(t-2)(t-4) = 0$　　$\therefore t = 2\ ,\ t = 4$

増減表を作ると

t	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$+$	0	$-$	0	$+$
x	$\nearrow$	20	$\searrow$	16	$\nearrow$

よって、点 P が運動の向きを変えるのは、２秒後 と ４秒後　〃

２秒後の点 P の x 座標は

$$\Big(x\Big)_{t=2} = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 24\cdot 2 = 8 - 36 + 48 = 20 \quad 〃$$

４秒後の点 P の x 座標は

$$\Big(x\Big)_{t=4} = 4^3 - 9\cdot 4^2 + 24\cdot 4 = 64 - 144 + 96 = 16 \quad 〃$$

≪考え方≫

運動の向きを変えるときは、速度 $v = \dfrac{dx}{dt} = 0$ であり、
かつ、その前後で速度 v の符号が変わるときである。