微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.8)$　解答例

1. $x>0$ のとき、不等式 $\dfrac{1}{4}x^3-x+1>0$ が成立することを証明せよ。

（証明）$f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x+1$ とおくと

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-1=\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{4}\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$f'(x)=0$ を $x>0$ の範囲で解くと、　$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって、$x>0$ の範囲で増減表を作ると

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　のとき最小となり、最小値は

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3-\frac{2}{\sqrt{3}}+1=\frac{2}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+1=\frac{2\sqrt{3}}{9}-\frac{2\sqrt{3}}{3}+1=\frac{9-4\sqrt{3}}{9}$$

よって、$x>0$ のとき、　$f(x)\geqq\dfrac{9-4\sqrt{3}}{9}$

ここで、$\dfrac{9-4\sqrt{3}}{9}>0$　であるから　　$x>0$ のとき　$f(x)>0$

したがって、$x>0$ のとき　$\dfrac{1}{4}x^3-x+1>0$　〃

2. $f(x)=x^5-5x^3-20x+10$ とするとき、次の各問に答えよ。

(1) $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を求めよ。

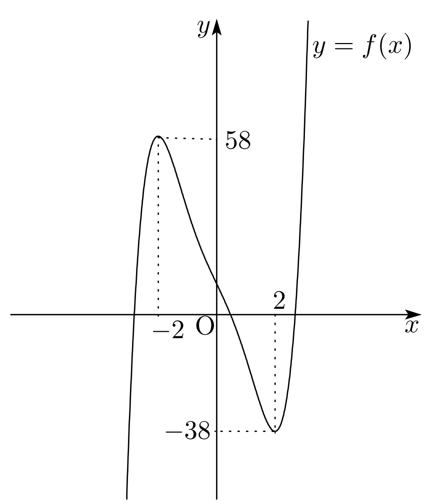
（解）

(1)　$y'=f'(x)=5x^4-15x^2-20=5(x^4-3x2-4)=5(x^2+1)(x^2-4)=5(x^2+1)(x+2)(x-2)$

よって、増減表をつくると

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	58	$\searrow$	-38	$\nearrow$

$$\begin{cases} x=-2 \quad のとき\quad 極大値 \quad 58 \quad 〃 \\ x=2 \quad のとき\quad 極小値 \quad -38 \quad 〃 \end{cases}$$



(2)　$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \quad (x\text{ 軸}) \end{cases}$　とおくと、

$f(x)=0$ の実数解の個数は、

$y=f(x)$ と x 軸との共有店の個数と一致する。

よって、求める実数解の個数は 3 個である。　〃

3. $x>0$ のとき、不等式 $x \geqq e\log x$ が成り立つことを証明せよ。

（証明）$y = x - e\log x$ とおくと、

$y' = 1 - e\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{x-e}{x}$

$x>0$ のとき、$y'=0$ から　$x=e$

よって、$x>0$ で増減表を作ると、

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=e$ のとき、$y = e - e\log e = 0$

よって、増減表から、$x=e$ のとき、y は最小値 0 をとる。

$\therefore$ $x>0$ のとき、$y \geqq 0$

$\therefore$ $x>0$ のとき、$x - e\log x \geqq 0$

したがって、 $x>0$ のとき、$x \geqq e\log x$ が成り立つ。　〃

（等号は $x=e$ のとき）

4. k を実数とするとき、x についての方程式 $x^3-3x^2-9x-k=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

（解）$x^3-3x^2-9x-k=0\cdots$①

これをを変形して

$x^3-3x^2-9x=k\cdots$②

そこで ② から

$$\begin{cases} y=f(x)=x^3-3x^2-9x & \cdots ③ \\ y=k & \cdots ④ \end{cases}$$

とおくと

$y' = f'(x) = 3x^2-6x-9 = 3(x^2-2x-3) = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ から　$x=-1,\ x=3$

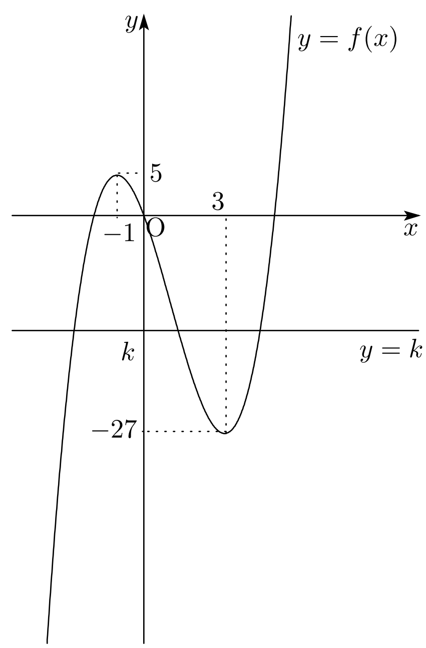
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

$$\begin{cases} x=-1 \quad \text{のとき}\quad \text{極大値} \quad 5 \\ x=3 \quad \text{のとき}\quad \text{極小値} \quad -27 \end{cases}$$

① すなわち ② の異なる実数解の個数は、

③ と ④ の共有点の個数と一致する。

③ と ④ のグラフは右図のようになるから、



よって、 求める異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} k<-27,\ 5<k \quad \text{のとき}\quad 1\text{個} \quad 〃 \\ k=-27,\ k=5 \quad \text{のとき}\quad 2\text{個} \quad 〃 \\ -27<k<5 \quad \text{のとき}\quad 3\text{個} \quad 〃 \end{cases}$$

である。