微分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　$(No.9)$　解答例

1. a を実数とするとき、x についての方程式 $2x^3-ax^2+1=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

（解１）$2x^3-ax^2+1=0\cdots$①

これをを変形して

$2x^3+1=ax^2$

① から $x\neq 0$ であるから

$2x+\dfrac{1}{x^2}=a\cdots$②

そこで ② から

$$\begin{cases} y=f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2} & \cdots③ \\ y=a & \cdots④ \end{cases}$$

とおくと

$y=f(x)=2x+x^{-2}$

$y'=f'(x)=2-2x^{-3}=2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{2(x^3-1)}{x^3}$

$$=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}=\frac{2(x-1)\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}}{x^3}$$

$f'(x)=0$ から　$x=1$　　よって、$x\neq 0$ で増減表をつくると

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	/	↘	3	↗

$\displaystyle\lim_{x\to\pm 0}f(x)=\lim_{x\to\pm 0}\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

よって　直線 $x=0$ すなわち y 軸が $y=(x)$ の漸近線である。

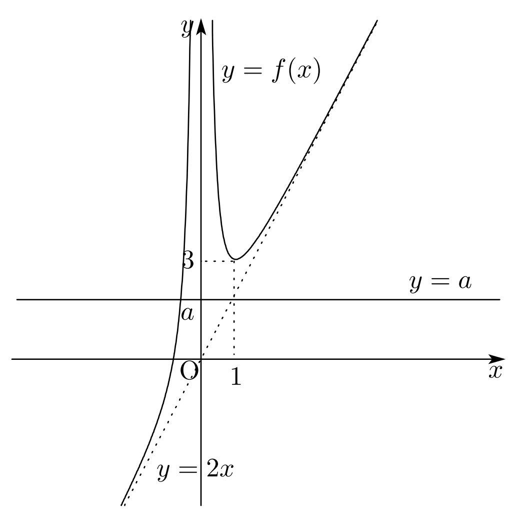
また、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}$ であるから

直線 $y=2x$ が $y=f(x)$ の漸近線である。

① すなわち ② の異なる実数解の個数は、

③ と ④ の共有点の個数と一致する。

③ と ④ のグラフは右図のようになるから、



よって、 求める異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} a<3 & \text{のとき　1 個　〃} \\ a=3 & \text{のとき　2 個　〃} \\ a>3 & \text{のとき　3 個　〃} \end{cases}$$

である。

（解２）$2x^3 - ax^2 + 1 = 0 \cdots$ ①

これをを変形して

$2x^3 + 1 = ax^2 \cdots$ ②

そこで ② から

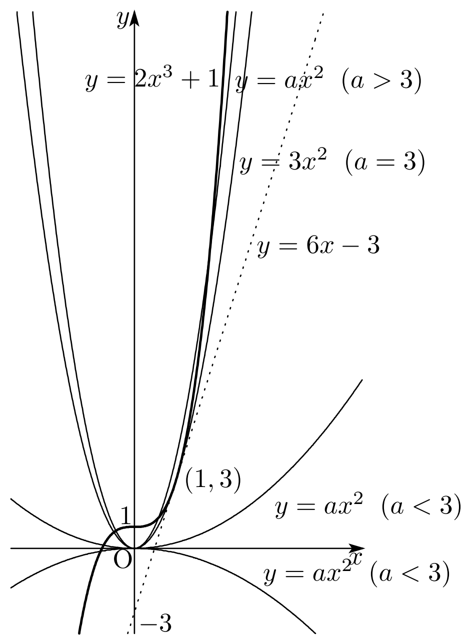
$$\begin{cases} y = f(x) = 2x^3 + 1 & \cdots ③ \\ y = g(x) = ax^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

とおくと

$y' = f'(x) = 6x^2$

よって、増減表をつくると

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$



$g'(x) = 2ax$

③と④が接するときは

$6x^2 = 2ax$　　$x(3x - a) = 0$

①から $x \neq 0$ であるから

$f\left(\dfrac{a}{3}\right) = g\left(\dfrac{a}{3}\right)$

$2\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 + 1 = a\left(\dfrac{a}{3}\right)^2$

$\dfrac{2}{27}a^3 + 1 = \dfrac{1}{9}a^3$

$2x^3 + 27 = 3a^3$　　$a^3 - 27 = 0$

$(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = 9$

$(a - 3)\left\{\left(a + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4}\right\} = 0$

ゆえに　$a = 3$　　このとき

$x = \dfrac{3}{3} = 1$　　$y = 2 \cdot 1^3 + 1 = 3$　　$y' = 6 \cdot 1^2 = 6$

よって、③と④の接点は $(1, 3)$ で、その点における接点の方程式は

$y - 3 = 6(x - 1)$　　$\therefore y = 6x - 3$

① すなわち ② の異なる実数解の個数は、③ と ④ の共有点の個数と一致する。

③ と ④ のグラフは右上図のようになるから、

よって、 求める異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} a < 3 & \text{のとき　1 個} \\ a = 3 & \text{のとき　2 個} \\ a > 3 & \text{のとき　3 個} \end{cases}$$

である。

（解３）$2x^3-ax^2+1=0\cdots$①

$$\begin{cases} y=f(x)=2x^3-ax^2+1 & \cdots② \\ y=0 \quad （x \text{ 軸}） & \cdots③ \end{cases}$$ とおくと

$$y'=f'(x)=6x^2-2ax=6x\left(x-\frac{a}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-a\left(\frac{a}{3}\right)^2+1=\frac{2}{27}a^2-\frac{1}{9}a^3+1$$

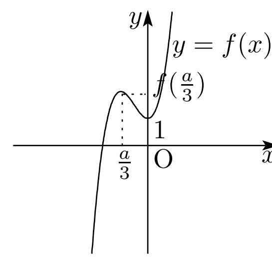
$$=-\frac{1}{27}(a^3-27)=-\frac{1}{27}(a-3)(a^2+3a+9)=-\frac{1}{27}(a-3)\left\{\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right\}$$

(１) $\dfrac{a}{3}<0$ すなわち $a<0$ のとき

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{1}{27}(a^3-27)=1-\frac{1}{27}a^3>1$$

よって、増減表をつくると

x	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(\frac{a}{3})$	↘	1	↗



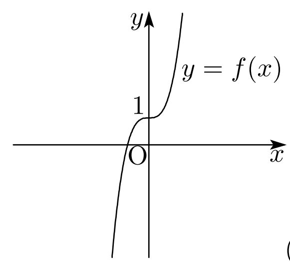
($a<0$ のとき)

(2) $\dfrac{a}{3}=0$ すなわち $a=0$ のとき

$f(x)=2x^3+1$ だから $f'(x)=6x^2$

よって、増減表をつくると

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

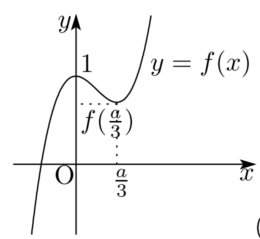


($a=0$ のとき)

(3) $\dfrac{a}{3}>0$ すなわち $a>0$ のとき

よって、増減表をつくると

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	$f(\frac{a}{3})$	↗



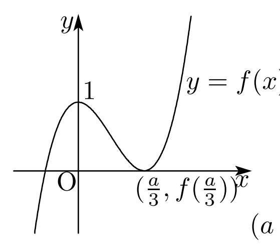
($0<a<3$ のとき)

(i) $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}(a-3)\left\{\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}\right\}>0$ のとき

$a-3<0$　$\therefore a<3$ よって、$0<a<3$ のとき

(ii) $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}(a-3)\left\{\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}\right\}=0$ のとき

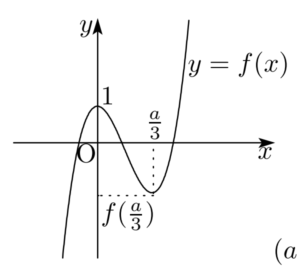
$a-3=0$　$\therefore a=3$ よって、$a=3$ のとき



($a=3$ のとき)

(iii) $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}(a-3)\left\{\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}\right\}<0$ のとき

$a-3>0$　$\therefore a>3$ よって、$a>3$ のとき



($a>3$ のとき)

① の異なる実数解の個数は、② と ③ すなわち

$y=f(x)$ と x 軸とのの共有点の個数と一致する。

$y=f(x)$ と x 軸のグラフは図のようになるから、

よって、 求める異なる実数解の個数は

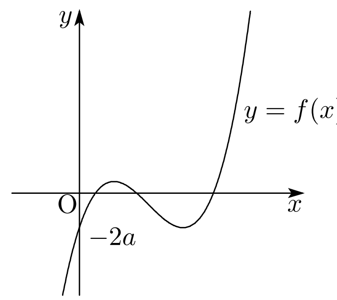
$$\begin{cases} a<3 \quad \text{のとき}\quad 1\text{個} \quad 〃 \\ a=3 \quad \text{のとき}\quad 2\text{個} \quad 〃 \\ a>3 \quad \text{のとき}\quad 3\text{個} \quad 〃 \end{cases}$$

である。

2. ３次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}(a+2)x^2+6ax-2a=0$ が異なる３つの正の解をもつような定数 a の範囲を求めよ。

（解）$x^3-\dfrac{3}{2}(a+2)x^2+6ax-2a=0 \quad \cdots①$

$$\begin{cases} y=f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(a+2)x^2+6ax-2a & \cdots② \\ y=0 \quad (x\text{ 軸}) & \cdots③ \end{cases}$$



とおくと。①が異なる３つの正の解をもつ条件は、

②と③が $x>0$ の範囲で３つの共有点もつこと、すなわち、

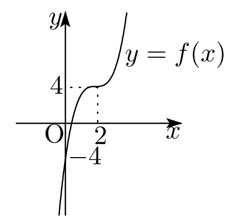
$y=f(x)$ が x 軸と $x>0$ の範囲で３つの共有点もつことである。

よって、$f(0)=-2a<0 \qquad \therefore a>0 \ \cdots ④$

$f'(x)=3x^2-3(a+2)x+6a=3\{x^2-(a+2)x+2a\}=3(x-a)(x-2)$

ここで、$x=2$ のとき、$f'(x)=3(x-2)^2$ であるから、

$y=f(x)$ は右図のようになっては極値をもたない。



よって、極値を持つ条件は、$a\neq 2 \ \cdots⑤$

このとき、$x=a,\ x=2$ で極値 $f(a),\ f(2)$ をもつ。

$f(a)=a^3-\dfrac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2-2a=-\dfrac{1}{2}a^3+3a^2-2a=-\dfrac{1}{2}a(a^2-6a+4)$

$f(2)=8-\dfrac{3}{2}(a+2)\times 4+6a\times 2-2a=8-6a-12+12a-2a=4a-4=4(a-1)$

極大値が正で、かつ、極小値が負であるための条件は、$f(a)\cdot f(2)<0$ である。

$\therefore f(a)\cdot f(2)=4(a-1)\left\{-\dfrac{1}{2}a(a^2-6a+4)\right\}=-2a(a-1)(a^2-6a+4)<0$

$\therefore a(a-1)(a^2-6a+4)>0$

ここで、$a^2-6a+4=0$ の解を求めると、$a=3\pm\sqrt{5}$ であるから、

$a^2-6a+4=\left\{a-\left(3+\sqrt{5}\right)\right\}\left\{a-\left(3-\sqrt{5}\right)\right\}$ と因数分解できる。

$\therefore a(a-1)\left\{a-\left(3+\sqrt{5}\right)\right\}\left\{a-\left(3-\sqrt{5}\right)\right\}>0 \ \cdots⑥$

ここで、$g(a)=a(a-1)\left\{a-\left(3+\sqrt{5}\right)\right\}\left\{a-\left(3-\sqrt{5}\right)\right\}$ とおくと、

$y=g(a)$ のグラフは右図のようになるから、

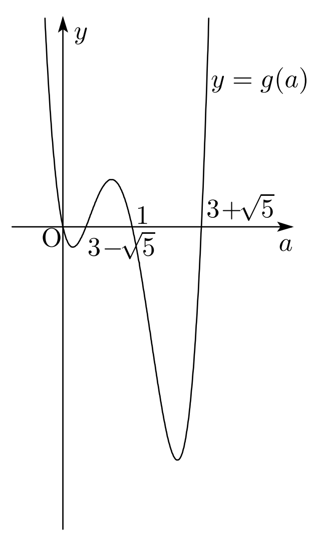
⑥ の解は $y=g(a)$ のグラフが a 軸の上側、

すなわち、$y>0$ の部分にある a の範囲である。

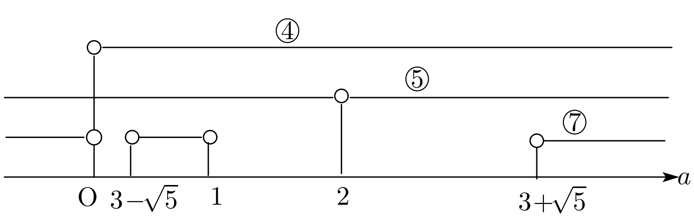
$\therefore a<0\,,\ 3-\sqrt{5}<a<1\,,\ 3+\sqrt{5}<a \ \cdots⑦$

よって、求める解は ④, ⑤, ⑦ の共有部分である。

$\therefore 3-\sqrt{5}<a<1\,,\ 3+\sqrt{5}<a$ 〃



《考え方》



（別解）$x^3 - \frac{3}{2}(a+2)x^2 + 6ax - 2a = 0 \quad \cdots$①

$$\begin{cases} y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(a+2)x^2 + 6ax - 2a & \cdots② \\ y = 0 \quad (x \text{軸}) & \cdots③ \end{cases}$$

とおくと。①が異なる 3 つの正の解をもつ条件は、

②と③が $x > 0$ の範囲で 3 つの共有点もつこと、すなわち、

$y = f(x)$ が x 軸と $x > 0$ の範囲で 3 つの共有点もつことである。

$f'(x) = 3x^2 - 3(a+2)x + 6a = 3\{x^2 - (a+2)x + 2a\} = 3(x-a)(x-2)$

$f(a) = a^3 - \frac{3}{2}(a+2)a^2 + 6a^2 - 2a = -\frac{1}{2}a^3 + 3a^2 - 2a = -\frac{1}{2}a(a^2 - 6a + 4)$

$f(2) = 8 - \frac{3}{2}(a+2) \times 4 + 6a \times 2 - 2a = 8 - 6a - 12 + 12a - 2a = 4a - 4 = 4(a-1)$

(1)　$a < 2$ のとき、グラフは右図のようになるから、

求める条件は

$f(0) = -2a < 0 \qquad \therefore a > 0 \ \cdots$ ④

極大値 $f(a)$ は正であるから

$f(a) = -\frac{1}{2}a(a^2 - 6a + 4) > 0 \qquad \therefore a(a^2 - 6a + 4) < 0$

$\therefore a\left\{a - \left(3 + \sqrt{5}\right)\right\}\left\{a - \left(3 - \sqrt{5}\right)\right\} < 0$

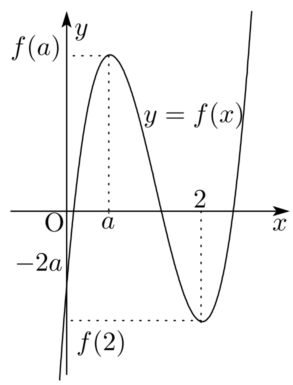
$\therefore a < 0,\ 3 - \sqrt{5} < a < 3 + \sqrt{5} \ \cdots$⑤

極小値 $f(2)$ は負であるから

$f(2) = 4(a-1) < 0) \qquad \therefore a < 1 \ \cdots$⑥

よって、④, ⑤, ⑥ の共有部分を求めて

$\therefore 3 - \sqrt{5} < a < 1$



(2)　$x = 2$ のとき、$f'(x) = 3(x-2)^2 \geqq 0$ であるから、増減表をつくると

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↗

$y = f(x)$ は極値をもたないから、①は異なる 3 つの正の解をもたない。

(3)　$a > 2$ のとき、グラフは右図のようになるから、

求める条件は

$f(0) = -2a < 0 \qquad \therefore a > 0 \ \cdots$ ⑦

極小値 $f(a)$ は負であるから

$f(a) = -\frac{1}{2}a(a^2 - 6a + 4) < 0 \qquad \therefore a(a^2 - 6a + 4) > 0$

$\therefore a\left\{a - \left(3 + \sqrt{5}\right)\right\}\left\{a - \left(3 - \sqrt{5}\right)\right\} > 0$

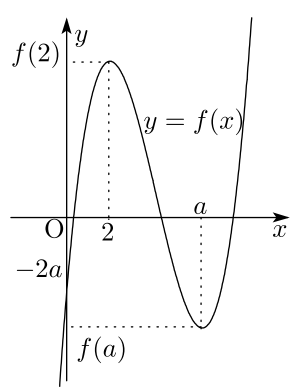
$\therefore 0 < a < 3 - \sqrt{5}\ ,\ 3 + \sqrt{5} < a \ \cdots$⑧

極大値 $f(2)$ は正であるから

$f(2) = 4(a-1) > 0 \qquad \therefore a > 1 \ \cdots$⑨

よって、⑦, ⑧, ⑨ の共有部分を求めて

$\therefore 3 + \sqrt{5} < a$



よって、求める解は (1),(2),(3) を合わせて

$\therefore 3 - \sqrt{5} < a < 1\ ,\ 3 + \sqrt{5} < a \quad$ 〃