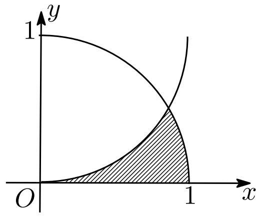
第 1I 章　微分積分 II《 § 3 重積分 》

$\boxed{103}$ 　$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1,\ x^2+(y-1)^2\geqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とする.

重積分　$\displaystyle\iint_D xe^{x^2+y^2}dxdy$　を求めよ.



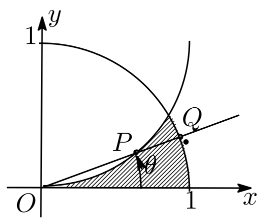
(九州大　改)

[解]

《　ポイント　》極座標変換において，$r,\ \theta$ の範囲と積分順序を考える.

図のように原点から方向角 θ の直線を引き，2 つの円と直線の交点を P と Q とする.

ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ である.



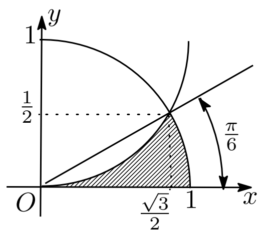
点 P の座標を $P(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とすると，

P は円 $x^2+(y-1)^2=1$ の上の点だから

$(r\cos\theta)^2+(r\sin)^2+(r\sin\theta-1)^2=1$

$r^2\sin^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1$

$r^2-2r\sin\theta=0\qquad\therefore\quad r(r-2\sin\theta)=0$



よって，$r>0$ より，$r=2\sin\theta$ が成り立つ.

これより，$\sin\theta=\dfrac{r}{2}\ \therefore\ \theta=\sin^{-1}\dfrac{r}{2}$

したがって，領域は次の 2 通りで示される.

$D\ :\ 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6},\ \ 2\sin r\leqq r\leqq 1\cdots$①

$D\ :\ 0\leqq r\leqq 1,\ \ 0\leqq\theta\leqq\sin^{-1}\dfrac{r}{2}\cdots$②

① は r から先に積分し，② は θ から先に積分する形である.

どちらを使って累次積分するかは関数によって決まる.

《　ポイント　》ヤコビアンの r を忘れないようにすること.　$(dxdy=rdrd\theta)$

①　より

$$\iint_D xe^{x^2+y^2}dxdy=\iint_D r\cos\theta\cdot e^{r^2}\cdot rdrd\theta=\iint_D r^2e^{r^2}\cos\theta drd\theta$$

$r^2e^{r^2}$ は r で積分できないから，θ から先に積分する ② に移る.

② より

$$\iint_D xe^{x^2+y^2}dxdy = \iint_D r\cos\theta \cdot e^{r^2} \cdot rdrd\theta$$

$$= \iint_D r^2 e^{r^2}\cos\theta d\theta dr$$

$$= \int_0^1 r^2 e^{r^2}\left\{\int_0^{\sin^{-1}\frac{r}{2}}\cos\theta d\theta\right\}dr$$

$$= \int_0^1 r^2 e^{r^2}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\sin^{-1}\frac{r}{2}}dr$$

$$= \int_0^1 r^2 e^{r^2}\left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{r}{2}\right)\right\}dr$$

$$= \int_0^1 \left(r^2 e^{r^2}\cdot\frac{r}{2}\right)dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3 e^{r^2}dr$$

ここで，$t = r^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dr} = 2r$ より, $dt = 2rdr$　　$\therefore\ \ rdr = \dfrac{1}{2}dt$ だから,

$$与式 = \frac{1}{2}\int_0^1 r^2 e^{r^2} rdr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 te^t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int_0^1 te^t dt$$

《　ポイント　》$(te^t)' = 1\cdot e^t + t\cdot e^t = e^t + te^t$ より，$te^t = (te^t)' - e^t$

$$\int_0^1 te^t dt = \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - \Big[e^t\Big]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

$$与式 = \frac{1}{4}\int_0^1 te^t dt = \frac{1}{4}\left\{\Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right\}$$

$$与式 = \frac{1}{4}\left\{e - \Big[e^t\Big]_0^1\right\} = \frac{1}{4}\{e-(e-1)\} = \frac{1}{4}$$

【注】本問は例外的に θ から先に積分する問題である．本問と同じ領域 D であっても

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{7\sqrt{3}}{16} - \frac{5}{24}\pi \ \ や$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2 \ \ (広義積分)$$

の場合は r から先に積分した方が簡単である.