第 1I 章　微分積分 II《 § 4 微分方程式 》

121(1)　次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + xy^2$$

(筑波大)

《　ポイント　》ベルヌーイの微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,\ 1)$

$y \neq 0$ のとき，一階線形微分方程式に変形して解く.

(i)　両辺に y^{-n} を掛けて $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (n \neq 0,\ 1)$

(ii) $z = y^{1-n}$ とおくと $\dfrac{z}{x} = (1-n)y^{-n}\dfrac{y}{x}$ より

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

[解] ベルヌーイ形 $\dfrac{dy}{dx} + \left(-\dfrac{1}{x}\right)y = xy^2$

(i)　両辺に y^{-2} を掛けて　$y^{-2}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y^{-1} = x$　　①

(ii)　$z = y^{-1}$ とおくと

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}y^{-1} = (-1)\cdot y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

よって，① と $\dfrac{dz}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$ より

$$-\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}\cdot z = x$$

$$\therefore\quad \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}\cdot z = -x \qquad ②$$

(iii)　斉次形 $\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{1}{x}\cdot z = 0$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

$$\int \frac{1}{z}dz = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\log|z| = -\log|x| + c$$

$$\log|z| + \log|x| = c$$

$$\log|zx| = c$$

$$|zx| = e^c$$

$$zx = \pm e^c$$

$zx = C$　　(C は任意定数)

$z = \dfrac{C}{x}$　　(C は任意定数)　　③

(iv) ③ の定数 C を x の関数 $u=C(x)$ と置き換えると

$$z=\frac{u}{x}=x^{-1}\cdot u \quad \text{また} \quad \frac{z}{x}=\frac{u}{x^2}$$

$$\frac{dz}{dx}=-x^{-2}\cdot u+x^{-1}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2}$$

斉次方程式 ② に代入して

$$\left(\frac{1}{x}\frac{du}{dx}-\frac{u}{x^2}\right)+\frac{u}{x^2}=-x$$

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx}=-x \qquad \therefore\ \frac{du}{dx}=-x^2$$

$$u=-\int x^2dx$$

$$u=-\frac{1}{3}x^3+c' \qquad \therefore\ zx=-\frac{1}{3}x^3+c'$$

$$z=-\frac{1}{3}x^2+\frac{c'}{x} \qquad \therefore\ z=-\frac{1}{3}x^2+\frac{C}{3x} \quad (C=3c')$$

$$z=y^{-1}\ \text{より} \qquad y^{-1}=-\frac{1}{3}x^2+\frac{C}{3x}$$

$$\frac{1}{y}=-\frac{x^3}{3x}+\frac{C}{3x} \qquad \therefore\ \frac{1}{y}=\frac{-x^3+C}{3x}$$

$$y=\frac{3x}{-x^3+C} \quad (C\ \text{は任意定数})$$