第 1I 章　微分積分 II《 § 4 微分方程式 》

128(2)　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' - 2y' + y = x\sin x$$

(北海道大)

《　ポイント　》特殊解 $y = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x$ を予想する．

[解]　特性方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ において，$(\lambda + 1)^2 = 0$ より，

解は $\lambda = 1$ (重解) であるから

斉次形の一般解は　$y = (C_1 + C_2x)e^x$　　　……①

特殊解を $y = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x$ と予想する．

ここで，$p(x) = A_1\cos x + B_1\sin x$

$q(x) = A_2\cos x + B_2\sin x$ とおくと，

特殊解は $y = xp(x) + q(x)$　　　……②

$p'(x) = -A_1\sin x + B_1\cos x$

$p''(x) = -A_1\cos x - B_1\sin x = -(A_1\cos x + B_1\sin x) = -p(x)$

$q'(x) = -A_2\sin x + B_2\cos x$

$q''(x) = -A_2\cos x - B_2\sin x = -(A_2\cos x + B_2\sin x) = -q(x)$

② より

$y' = 1\cdot p(x) + x\cdot p'(x) + q'(x) = xp'(x) + p(x) + q'(x)$

$y'' = 1\cdot p'(x) + x\cdot p''(x) + p'(x) + q''(x) = p'(x) + x\{-p(x)\} + p'(x) + \{-q(x)\}$

$= p'(x) - xp(x) + p'(x) - q(x) = -xp(x) + 2p'(x) - q(x)$

$y'' - 2y' + y$　　　($\Longleftarrow$ 与式の左辺)

$= \{-xp(x) + 2p'(x) - q(x)\} + \{xp'(x) + p(x) + q'(x)\} + \{xp(x) + q(x)\}$

$= -2xp'(x) + 2p'(x) - 2p(x) - 2q(x)$

$= -2x(-A_1\sin x + B_1\cos x) + 2(-A_1\sin x + B_1\cos x) - 2(A_1\cos x + B_1\sin x) - 2(-A_2\sin x + B_2\cos x)$

$= x(2A_1\sin x - 2B_1\cos x) + (2B_1 - 2A_1 - 2B_2)\cos x + (-2A_1 - 2B_1 + 2A_2)\sin x$

$= x\sin x$　　　($\Longleftarrow$ 与式の右辺)

よって，次の連立方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} x(2A_1\sin x - 2B_1\cos x) = x\sin x \\ 2B_1 - 2A_1 - 2B_2 = 0 \\ -2A_1 - 2B_1 + 2A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(2A_1\sin x - 2B_1\cos x) = x\sin x \\ B_1 - A_1 - B_2 = 0 \\ -A_1 - B_1 + A_2 = 0 \end{cases}$$

これを解くと,

$2A_1 = 1 \quad \therefore \ A_1 = \dfrac{1}{2}, \qquad B_1 = 0$

$0 - \dfrac{1}{2} - B_2 = 0$ より, $B_2 = -\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{2} - 0 + A_2 = 0$ より, $A_2 = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad A_1 = \dfrac{1}{2},\ B_1 = 0,\ A_2 = \dfrac{1}{2},\ B_2 = -\dfrac{1}{2}$

よって, 特殊解は

$y = \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\right)\cos x + \left(0 \cdot x - \dfrac{1}{2}\right)\sin x$

$\therefore \ y = \dfrac{1}{2}(x+1)\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x$ $\cdots\cdots$③

よって, ①, ③ より, 一般解は

$$y = \frac{1}{2}(x+1)\cos x - \frac{1}{2}\sin x + (C_1 + C_2 x)e^x \qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$