第 3 章　線形代数《 § 1 ベクトル 》

$\boxed{145}$ $-x+2\sqrt{2}y-4z=1$ で表される平面 A と，$2x+2z=1$ で表される平面 B がある．

この 2 つの平面に関する以下の各問に答えよ．

(1) この 2 つの平面のなす角は何度となるか 求めよ．

(2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めよ．

(3) この 2 つの平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めよ．

(三重大)

[解]

(1) 平面 A, B の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$\vec{a}=(-1,2\sqrt{2},-4)$, $\vec{b}=(2,0,2)$,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$=\frac{(-1)\cdot 2+2\sqrt{2}\cdot 0+(-4)\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+(2\sqrt{2})^2+(-4)^2}\,\sqrt{2^2+0^2+2^2}}$$

$$=\frac{-2+0-8}{\sqrt{1+8+16}\,\sqrt{4+0+4}}=\frac{-10}{\sqrt{25}\,\sqrt{8}}=\frac{-10}{5\cdot 2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ \theta=135^\circ$

よって，求める 2 平面のなす角は 45°である ．

(2) 《 ポイント 》2 つの平面の交線は, 2 つの平面の連立方程式から求める．

2 つの平面の交線上の点 (x,y,z) は，両方の平面上にあるから

$$\begin{cases} -x+2\sqrt{2}y-4z=1 & \cdots ① \\ 2x+2z=1 & \cdots ② \end{cases}$$

② から，$2x=-2z+1$　　$\therefore\ x=-z+\frac{1}{2}$

これを ① に代入して，

$$-\left(-z+\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{2}-4z=1 \qquad \therefore\ 2\sqrt{2}=3z+\frac{3}{2}$$

$$4y=3\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ y=\frac{3\sqrt{2}}{4}z+\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

よって，$z=t$ とおくと，求める交線の方程式は

$$x=-t+\frac{1}{2},\ y=\frac{3\sqrt{2}}{4}t+\frac{3\sqrt{2}}{8},\ z=t \qquad (\ t\ は任意定数\ )$$

[(2) の別解]　《　ポイント　》$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ の外積は

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

2 つの平面の法線ベクトルはそれぞれ $\vec{a}=(-1,\ 2\sqrt{2},\ -4),\ \vec{b}=(1,\ 0,\ 1)$ であるから,

この 2 つの平面の法線ベクトルの外積は

$\vec{a}\times\vec{b}=(-1,\ 2\sqrt{2},\ -4)\times(1,\ 0,\ 1)$

$=\big(2\sqrt{2}\cdot 1-(-4)\cdot 0,\ (-4)\cdot 1-(-1)\cdot 1,\ (-1)\cdot 0-2\sqrt{2}\cdot 1\big)=\big(2\sqrt{2},\ -3,\ -2\sqrt{2}\big)$

$=-2\sqrt{2}\left(-1,\ \dfrac{3}{2\sqrt{2}},\ 1\right)=-2\sqrt{2}\left(-1,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{4},\ 1\right)$

よって, $\left(-1,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{4},\ 1\right)$ は, 求める交線の方向ベクトルである.

2 つの平面の方程式で $z=0$ として

$$\begin{cases} -x+2\sqrt{2}y=1 \\ 2x=1 \end{cases}$$

を解くと, $x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ だから, 点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{8},0\right)$ は交線上の点の 1 つである.

よって, 求める直線の方程式は,

交線の方向ベクトルが $\left(-1,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{4},\ 1\right)$ で, 点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{8},0\right)$ を通るから,

$x=(-1)\cdot t+\dfrac{1}{2},\ \ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot t+\dfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \ z=1\cdot t+0$

$\therefore\ x=-t+\dfrac{1}{2},\ \ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot t+\dfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \ z=t$

(3)　《　ポイント　》2 つの平面 $f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)=0$ の交線を含む平面は,
$f(x,y,z)=0+k\cdot g(x,y,z)=0$ と表すことができる.

2 つの平面 $-x+2\sqrt{2}y-4z-1=0,\quad 2x+2z-1=0$ の交線を含む平面は,

$(-x+2\sqrt{2}y-4z-1)+k(2x+2z-1)=0$

とおける. これが原点を通るから, $-1+k(-1)=0\quad\therefore\ k=-1$

よって, 求める方程式は,

$(-x+2\sqrt{2}y-4z-1)-(2x+2z-1)=0$

$-x+2\sqrt{2}y-4z-1-2x-z+1=0$

$\therefore\ 3x-2\sqrt{2}y+6z=0$

[(3) の別解] (2) で求めた交線の方程式より,

$x=-t+\dfrac{1}{2},\ \ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot t+\dfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \ z=t \qquad \cdots\cdots③$

$t=0$ とおくと, $x=\dfrac{1}{2},\ \ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \ z=0$

よって, ③ は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{8},\ 0\right)$ を通る. ,

$t=-\dfrac{1}{2}$ とおくと, $x=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=1,\ \ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=0,\ \ z=-\dfrac{1}{2}$

よって, ③ は点 $\left(1,\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ を通る.

求める平面を方程式を

$ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots\cdots④$

とおくと, ④ は 2 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{8},\ 0\right)$, $\left(1,\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, と原点 $(0,0,0)$ を通るから,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a+\dfrac{3\sqrt{2}}{8}b+d=0 \\ a-\dfrac{1}{2}c+d=0 \\ \quad d=0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 4a+3\sqrt{2}b=0 \\ 2a-c=0 \end{cases}$$

$b=-\dfrac{4}{3\sqrt{2}}a=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3\cdot 2}a=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a, \qquad c=2a$

よって, ④ に $b=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a,\ c=2a,\ d=0$ を代入して,

$ax-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}ay+2az=0 \qquad \therefore\ \ a\left(3x-2\sqrt{2}y+6z\right)=0$

$a\neq 0$ より, $3x-2\sqrt{2}y+6z=0$

【注】(2) の直線の方程式 $x=-t+\dfrac{1}{2},\ \ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot t+\dfrac{3\sqrt{2}}{8},\ \ z=t$ は次のように答えてもよい.

$t=\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{-1},\ \ t=\dfrac{y-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}},\ \ t=z$ より

$$\frac{x-\dfrac{1}{2}}{-1}=\frac{y-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}=z$$

$$\therefore\ \ \frac{x-\dfrac{1}{2}}{-4}=\frac{y-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}}{3\sqrt{2}}=\frac{z}{4}$$

《　ポイント　》点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り,
方向ベクトルが $(v_x,\ v_y,\ v_z)$ の直線の方程式は,
$v_x\neq 0\ \ v_y\neq 0,\ v_z\neq 0$ のとき.

$$\frac{x-x_1}{v_x}=\frac{y-y_1}{v_y}=\frac{z-z_1}{z_x}$$

(2) の直線は方向ベクトルが $\left(-1,\ \frac{3\sqrt{2}}{4},\ 1\right)$ で,

点 $\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{2}}{8},0\right)$ を通るから,

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{y-\frac{3\sqrt{2}}{8}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}}=\frac{z-0}{1}$$