第 3 章　線形代数《 § 1 ベクトル 》

$\boxed{152}$　R^3 のベクトル　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, が 1 次独立であることを示せ.

また, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$, を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合で表せ.　(信州大)

《　ポイント　》要項 45②　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が n 次の列ベクトルである場合,
　　それを並べて作った正方行列 $A=(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$ に対して,
　　$|A|\neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立　（線形独立）
　　$|A|=0 \Longrightarrow \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次従属　（線形従属）

《　ポイント　》$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}+c_3\boldsymbol{c}$ （ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の 1 次結合という ）において, c_1, c_2, c_3 を求める.

[解] 3 次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を並べて作った正方行列 $(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c})=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$ より,

$$\begin{vmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=(-4)+(-2)+(-2)-(-1)-(-4)-(-4)=1\neq 0$$

よって, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立である.

$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}+c_3\boldsymbol{c}$ とおくと,

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}2c_1+2c_2+c_3\\-c_1-c_2-c_3\\c_1+2c_2+2C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{cases}2c_1+2c_2+c_3=1\ \cdots ①\\-c_1-c_2-c_3=-5\ \cdots ②\\c_1+2c_2+2C_3=-3\cdots ③\end{cases}$$

② + ③　$c_2+c_3=-8\cdots$ ④

② × 2　$-2c_1-2c_2-2c_3=-10\cdots$ ②′

① + ②′　$-C_3=-9$, $\therefore\ c_3=9$

これを ④ に代入して, $c_2+9=-8$, $\therefore\ c_2=-17$

よって, ② より, $c_1=-c_2-c_3+5=-(-17)-9+5=13$

$\therefore\ \boldsymbol{x}=13\boldsymbol{a}-17\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{c}$