第 1 章　微分積分 I《 § 1 微分 》

$\boxed{16}$ x の関数 $f(x)=2\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\quad (x \geqq 0)$ を考える.

(1) $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\quad (x \geqq 0)$ の極値を求めよ.

(京都工芸繊維)

[解]

(1)
$$f'(x)=\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)'=\left(2(x+1)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)'\quad =2\cdot\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1}(x+1)'-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$=(x+1)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\left((x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}=\left(\sqrt{x+1}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{-1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad =\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}}\quad (x>0)\quad \cdots\cdots\boxtimes$$

《　ポイント この分母は 0 でないから, $x>0$　よって, $2\sqrt{x(x+1)}>0$ であることを利用する. 》

$f'(x)=0$ を解くと,　$2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=0$ より　$2\sqrt{x}=\sqrt{x+1}$

$\left(\sqrt{x}=\sqrt{x+1}\right)^2$ より $4x=x+1\therefore\ x=\dfrac{1}{3}$

$f'(x)>0$ を解くと,　$\sqrt{x}-\sqrt{x+1}>0$ より　$\sqrt{x}>\sqrt{x+1}$

$\left(\sqrt{x}>\sqrt{x+1}\right)^2$ より $4x>x+1\therefore\ x>\dfrac{1}{3}$

$f'(x)<0$ を解くと,　$\sqrt{x}-\sqrt{x+1}<0$ より　$\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$

$\left(\sqrt{x}<\sqrt{x+1}\right)^2$ より $4x<x+1\therefore\ x<\dfrac{1}{3}$

$\boxtimes$ より, $x>0$ だから,　$\therefore\ 0<x<\dfrac{1}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	$\sqrt{3}$	↗

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=2\sqrt{\frac{1}{3}+1}-\sqrt{\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$=2\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}=2\cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}=3\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

よって, 増減表は右上のようになる.　　　$\therefore\quad x=\dfrac{1}{3}$ のとき, 極小値 $\sqrt{3}$

(2)
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\left(2-\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\left(2-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}\right)=\infty$$

《　ポイント　不定形の極限　不定形となる原因を探り, 解消する.　》

∞ー∞ 型では , ∞ となる部分の差をとりたいが , √ の中に入っている場合は , そのままでは差がとれないから, 有理化して差をとるようにする. 分母が∞ +∞となっても , それは $\to\infty$ ということだから扱いやすい.

【(2) の別解】

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\left(2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4(x+1) - x}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x+4}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{3x+4}{\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1} = \infty$$

(3) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$

(1) の増減表より　$f(x) \geqq \sqrt{3}$ だから　$\dfrac{1}{f(x)} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) より　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ だから　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

よって　$\dfrac{1}{f(x)}$ は，$0 < \dfrac{1}{f(x)} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の範囲のすべての値をとる.

$y = \tan^{-1} x$ は単調増加の関数だから

$\tan^{-1}(0) < \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) \leqq \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\tan^{-1}(0) < y \leqq \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\alpha = \tan^{-1}(0)$ とおくと，$\tan\ \alpha = 0$ より　$\alpha = 0$ だから $\tan^{-1}(0) = 0$

$\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とおくと，$\tan\ \beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\beta = \dfrac{\pi}{6}$ だから　$\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \quad 0 < y \leqq \dfrac{\pi}{6}$