第 3 章　線形代数《 § 1 ベクトル 》

$\boxed{160}$ 次に示す 3 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ および $\boldsymbol{a}_3$ について，以下の各問に答えよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ および $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立（1 次独立）であることを示せ.

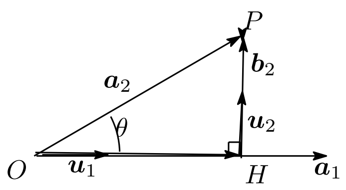
(2) $\boldsymbol{a}_1$ を正規化せよ.

(3) グラム・シュミットの直交化を用いて，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ および $\boldsymbol{a}_3$ を正規直交化せよ.

ただし，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ および $\boldsymbol{a}_3$ の順に正規直交基底を求めよ.

(熊本大)

《　ポイント　》グラム・シュミットの直交化法を用いる.
与えられた $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を作る方法を，
グラム・シュミットの直交化法という.



(i) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|}|$ とする.　($\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{a}_1$ の大きさを 1 にしたもの)

(ii) 心に残るように右図を利用して確認しておく.

$|\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OP}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}_2|\cos\theta$

$\overrightarrow{OH} = (|\boldsymbol{a}_2|\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 = (|\boldsymbol{a}_2||\boldsymbol{u}_1|\cos\theta)\boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$

$\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH}$ より

$\therefore\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$

よって，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ とおき，$\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|}$ とする.

(　$\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ で張られる平面上にあり，$\boldsymbol{u}_1$ と垂直なもの　)

(iii) $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$ とおき，$\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|}$ とする.

(　$\boldsymbol{b}_3$ は $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ に垂直なもの　)

[解]

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0$ より 1 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である.;

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0)\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{b}_2| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{|\boldsymbol{b}_2|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{b}_3| = \frac{2}{3}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{|\boldsymbol{b}_3|} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \times \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$