第 3 章　線形代数《 § 2 行列と行列式 》

$\boxed{185}$ 連立方程式 $\begin{cases} 2x - y - 3z &= 2 \\ x - 3y - 2z &= 5 \\ -x + y + z &= -3 \end{cases}$ について，次の問いに答えよ．

(1) この連立方程式を，行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表したとき．A を求めよ．

ただし，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ はベクトルであり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$，とする．

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) この連立方程式を解け．

(宮崎大)

[解]

(1) 与式を行列とベクトルで表すと．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

これと条件 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を比べて，$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) A の逆行列 A^{-1} を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3\text{行} \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2\text{行} - 3\text{行} \times 1]{1\text{行} - 3\text{行} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行} - 1\text{行} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{行} - 3\text{行} \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行} + 2\text{行} \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\,行\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{1\,行+3\,行\times 2 \\ 2\,行+3\,行\times 4}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ より

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 5 + 7\times(-3) \\ (-1)\times 2 + 1\times 5 + (-1)\times(-3) \\ 2\times 2 + 1\times 5 + 5\times(-3) \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x = 3,\ y = -2,\ z = 2$$

《　検算　》$x = 3,\ y = -2,\ z = 2$ のとき,

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2\times 3 - (-2) - 3\times 2 = 2 \\ x - 3y - 2z = 3 - 3\times(-2) - 2\times 2 = 5 \\ \quad -x + y + z = -3 + (-2) + 2 = -3 \end{cases}$$

《　参考　》連立方程式は参考書の解答のように，各行を交換しても良い.