第１章　微分積分 I《 § 1 微分 》

$\boxed{19}$ $\dfrac{2x}{\pi} \leqq \sin x \leqq x \quad \left(0 \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$; が成り立つことを示せ.

(東北大)

[解] 《　ポイント　$f(x) = x - \sin x,\quad g(x) = sinx - \dfrac{2x}{\pi}$　とおいて，これらの増減を調べる.　》

(i) $x \geqq \sin x$ を証明する．$f(x) = x - \sin x$ とおくと　$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$

$f'(x) = 0$ を解くと，$\cos x = 1$ より $x = 0$

$f(0) = 0 - \sin 0 = 0$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 1$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$

よって，増減表は右図のようになるから.

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(x) \geqq 0$

よって　$x - \sin x \geqq 0 \qquad \therefore\ x \geqq \sin x$

(ii) $\sin x \geqq \dfrac{2x}{\pi}$ を証明する．$g(x) = \sin x - \dfrac{2x}{\pi}$ とおくと

$g'(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi} \qquad 0 < \dfrac{2}{\pi} < 1$ より，

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\pi} \quad \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす α が存在する.

$g(0) = \sin 0 - \dfrac{2\cdot 0}{\pi} = 0$

$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi} = 1 - 1 = 0$

$0 < x < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos 0 > \cos x > \cos\alpha$

$\cos 0 - \dfrac{2}{\pi} > \cos x - \dfrac{2}{\pi} > \cos\alpha - \dfrac{2}{\pi}$

$1 - \dfrac{2}{\pi} > \cos x - \dfrac{2}{\pi} > 0 \quad \therefore\ g'(x) > 0$

$0 < \alpha < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\alpha > \cos x > \cos\frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha - \dfrac{2}{\pi} > \cos x - \dfrac{2}{\pi} > \cos\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{\pi}$

$0 > \cos x - \dfrac{2}{\pi} > 0 - \dfrac{2}{\pi} \quad \therefore\ g'(x) < 0$

よって，増減表は右図のようになるから.

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $g(x) \geqq 0$

よって，　$\sin x - \dfrac{2x}{\pi} \geqq 0 \qquad \therefore\ \sin x \geqq \dfrac{2x}{\pi}$

(i)，(ii) より $\dfrac{2x}{\pi} \leqq \sin x \leqq x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

《　ポイント　右下のグラフを参照して，増減を調べてもよい．　》

○ $y=\sin x$ とおくと，$y'=\cos x$ より，

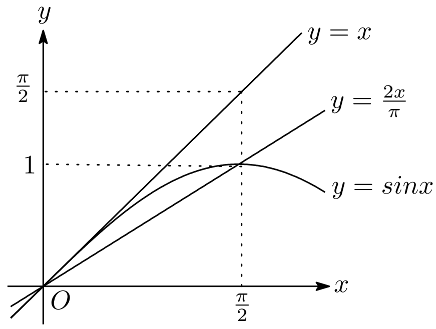
点 $(0,0)$ における接線の方程式は　$y-0=\cos 0(x-0)$ $\therefore$ $y=x$

○ $y=\dfrac{2x}{\pi}$ は 原点を通り，傾き $\dfrac{2}{\pi}$，の直線だから，　$y=\dfrac{2}{\pi}x$

よって，$x=\dfrac{\pi}{2}$　のとき, $y=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}=1$

○ $y=\sin x$ より $y'=\cos x$ $\therefore$ $y''=-\sin x$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より, $y''=-\sin x<0$ だから，上に凸である．



よって，右図上の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において.

$x-\sin x\geqq 0$　$\therefore$ $x\geqq\sin x$

$\sin x-\dfrac{2x}{\pi}\geqq 0$　$\therefore$ $\sin x\geqq\dfrac{2x}{\pi}$

$\therefore$ $\dfrac{2x}{\pi}\leqq\sin x\leqq x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$