第 3 章　線形代数《 § 3　固有値とその応用 》

$\boxed{195}$ 次の行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたすべての固有値に対して，固有ベクトルを求めよ.

(3) A は対角化可能か述べよ．また対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角化行列になる P を 1 つ求めよ.

(筑波大)

[解]　《　ポイント　》固有値と固有ベクトルを求め，対角化行列を作り，行列を対角化する.

(1) 固有方程式は

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{1\,列 + (2\,列 + 3\,列) \times 1}} \quad \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 4 \\ 9-\lambda & 1-\lambda & 4 \\ 9-\lambda & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix} 2\,行 - 1\,行 \times 1 \\ 3\,行 - 1\,行 \times 1 \end{matrix}}} \quad (9-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(-3-\lambda)^2 = 0$$

ゆえに固有値は $\lambda = -3$ (重解)，9

(2) 《　ポイント　》固有値 λ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は $(A-\lambda)\boldsymbol{x}=0$ を解けばよい.

$\lambda=-3$(重解）の場合

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}-(-3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{各行}\times\frac{1}{4}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{3 行}-\text{1 行}\times 1]{\text{2 行}-\text{1 行}\times 1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　　$\therefore\ x+y+z=0$

$x=c_1,\ y=c_2$ とおくと, $z=-c_1-c_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1-c_2 \end{pmatrix}\qquad \therefore\ \boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ (c_1\neq 0 \text{ または } c_2\neq 0)$$

$\lambda=9$ の場合

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}-9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{各行}\times\frac{1}{4}}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{1 行}+(\text{2 行}+\text{3 行})\times 1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3 行}-\text{2 行}\times 1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3 行}\times\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行}+\text{3 行}\times 2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

よって, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　　$\therefore\ x-z=0,\ y-z=0$ より, $\therefore\ x=z,\ y=z$

$x=y=z=c_1$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\qquad \therefore\ \boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ (c_1\neq 0)$$

(3) $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ とおくと.

$$|P|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=\{1+0+0\}-\{(-1)+(-1)+0\}=3\neq 0 \text{ より}$$

A は 3 個の線形独立な固有ベクトルをもつから，対角化可能である.

P^{-1} を求める.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\-1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}\times 1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-1&2&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}\times 1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&3&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行}\times\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2\text{行}-3\text{行}\times 1]{1\text{行}-3\text{行}\times 1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\therefore\ P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

よって，

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&4\\4&1&4\\4&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&3&3\\3&-6&3\\9&9&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&1&1\\3&-2&1\\3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

よって，求める行列の 1 つは，$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ である.

【参考事項】A^n を求める.

$$A^n = P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)p^{-1} = P(P^{-1}AP)^n p^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^n \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-3)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^n \cdot \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-3)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-3)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & (-3)^n \\ 0 & 1 & (-3)^n \\ -1 & -1 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-3)^{n-1} \begin{pmatrix} -2-(-3)^n & 1-(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & -2-(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1-(-3)^n & -2-(-3)^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^n = (-3)^{n-1} \begin{pmatrix} -2-(-3)^n & 1-(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & -2-(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 1-(-3)^n & -2-(-3)^n \end{pmatrix}$$

《　検算　》

$n = 1$ のとき,

$$A^1 = (-3)^0 \begin{pmatrix} -2-(-3) & 1-(-3) & 1-(-3) \\ 1-(-3) & -2-(-3) & 1-(-3) \\ 1-(-3) & 1-(-3) & -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

明らかに，与式と一致する.

$n = 2$ のとき,

$$A^2 = (-3)^1 \begin{pmatrix} -2-(-3)^2 & 1-(-3)^2 & 1-(-3)^2 \\ 1-(-3)^2 & -2-(-3)^2 & 1-(-3)^2 \\ 1-(-3)^2 & 1-(-3^2) & -2-(-3)^2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -11 & -8 & -8 \\ -8 & -11 & -8 \\ -8 & -8 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 24 & 24 \\ 24 & 33 & 24 \\ 24 & 24 & 33 \end{pmatrix}$$

直接掛け算をすると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 24 & 24 \\ 24 & 33 & 24 \\ 24 & 24 & 33 \end{pmatrix}$$

よって，明らかに成り立つ．$n \geqq 3$ のときでも成り立つことを検算して見て下さい.