第3章　線形代数《 § 3　固有値とその応用 》

$\boxed{197}$　a は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a-1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能のとき，a が満たす条件を求め，対角化せよ．

(信州大)

[解]　《　ポイント　》3 次の正方行列は 3 個の線形独立な固有ベクトルをもつならば, 対角化可能である.

A の固有方程式は

$$|A-\lambda E| = \left|\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a-1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ a-1 & 1-\lambda & a-1 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{列}-3\text{列}\times 1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & a-1 \\ -(2-\lambda) & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{3\text{行}+1\text{行}\times 1}{=\!=\!=} (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)\{1\times(1-\lambda)\} - \{(a-1)\times 0\}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

$\therefore\ \lambda = 2,\ \lambda = 1$(重解)

よって，固有値は $\lambda = 1$(重解), 2

《　ポイント　》固有値 λ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(A-\lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$ を解けばよい.

$\lambda = 1$(重解) の場合

$$A - 1\cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a-1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & a-1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$

$a \neq 1$ のとき，① より

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}\times\frac{1}{a-1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}-2\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}-1\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x = 0,\ z = 0$　　よって，$y = c_1$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (c_1 \neq 0)$$

$a = 1$ のとき，① より

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ 2x + z = 0 \therefore\ z = -2x$

$x = c_1$ とおくと，$z = -2c_1$，$y = c_2$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -2c_1 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (c_1 \neq 0 \text{ または } c_2 \neq 0)$$

$\lambda = 2$ の場合

$$A - 2\cdot E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & 1 & a-1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a-1 & -1 & a-1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}-1\text{行}\times(a-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{行}+1\text{行}\times 2]{2\text{行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x + z = 0,\ y = 0$　　$x = c_1$ とおくと，$z = -c_1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ -c_1 \end{pmatrix} \quad \therefore\ \boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ (c_1 \neq 0)$$

《　ポイント　》3 個の線形独立な固有ベクトルをもつとき，対角化可能だから，求める条件は $a = 1$ で，

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

この逆行列 P^{-1} を求める．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\,行 + 1\,行 \times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\,行 - 3\,行 \times 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

《　参考事項　》A^n を求める.

$A^n = P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)P^{-1}$

$= P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 0 & -1+2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 0 & 2-2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 0 & -1+2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 0 & 2-2^n \end{pmatrix} \cdots ②$$

《　検算　》

$n=1$ のとき，② より

$$A^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，与式と一致する.

$n=2$ のとき，② より

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

直接計算すると，

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

よって，公式 ① 利用と直接計算が一致する.