# 第 3 章　線形代数《 § 3　固有値とその応用 》

$\boxed{204}$ 以下の行列 $A$ について，1 次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ の固有ベクトルを求めよ．

(3) $A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ．

(横浜国立大)

《　ポイント　》$A,\ B,\ C$ が $n$ 次正方行列，$O$ が $n$ 次の零行列のとき，

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A|\ |B|$$

[解]

(1) 固有方程式は

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6-\lambda & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 8 \\ -4 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{1\text{ 行}+2\text{ 行}\times 1}{\overset{1\text{ 列}+2\text{ 列}\times 1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda \\ -4 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{2\text{ 列}-1\text{ 列}\times 1}{\overset{2\text{ 行}-1\text{ 行}\times 1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$\lambda = 1,\ \lambda = -1,\ \lambda = 2,\ \lambda = -2$

よって，固有値は $\lambda = -2,\ -1,\ 1,\ 2$

(2) 《　ポイント　》固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ を解けばよい.

$\lambda=-2$ の場合

$$A-(-2)E=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 8 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{1\text{行}\times(-1) \\ 2\text{行}-1\text{行}\times 2 \\ 3\text{行}+2\text{行}\times 3 \\ 4\text{行}-2\text{行}\times 1}]{}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 8 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{2\text{行}\times\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 3\text{行}\times\frac{1}{8} \\ 4\text{行}+3\text{行}\times\frac{1}{2}}]{}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{1\text{行}+2\text{行}\times 4 \\ 3\text{行}-2\text{行}\times 2}]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+w \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x=0,\ y=0,\ z+w=0$ より $z=c_1$ とおくと, $w=-c_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ -c_1 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ v_1=c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$ の場合

$$A-(-1)E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 7 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{1\text{行}\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 2\text{行}-1\text{行}\times 1 \\ 3\text{行}+1\text{行}\times 3 \\ 4\text{行}-1\text{行}\times 1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 7 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+4\text{行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{行}+3\text{行}\times 2 \\ 3\text{行}\times(-1) \\ 4\text{行}-3\text{行}\times 7}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{行}\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{行}-4\text{行}\times 2 \\ 3\text{行}-4\text{行}\times 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2w \\ 0 \\ y-w \\ z+3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x = 2w,\ y = w,\ z = -3w$ より $w = c_2$ とおくと, $x = 2c_2,\ y = c_2,\ z = -3c_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 \\ c_2 \\ -3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

$\lambda = 1$ の場合

$$A - E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{行} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ 2\text{行} - 1\text{行} \times \left(\frac{1}{2}\right) \\ 3\text{行} + 2\text{行} \times 3 \\ 4\text{行} - 2\text{行} \times 1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{行} + 3\text{行} \times 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行} - 4\text{行} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{行} + 3\text{行} \times 1 \\ 4\text{行} - 3\text{行} \times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4\text{行} \times \left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{行} - 4\text{行} \times 2 \\ 3\text{行} - 4\text{行} \times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - w \\ 0 \\ y - w \\ z + 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x = w,\ y = w,\ z = -3w$ より $w = c_3$ とおくと，$x = c_3,\ y = c_3,\ z = -3c_3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ -3c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ v_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

$\lambda = 2$ の場合

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 4 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{3\text{行} + 2\text{行} \times 3 \\ 4\text{行} - 2\text{行} \times 1}]{1\text{行} - 2\text{行} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2\text{行} + 1\text{行} \times 2 \\ 3\text{行} \times \frac{1}{4} \\ 4\text{行} + 3\text{行} \times 1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{行} \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1\text{行} - 2\text{行} \times 1 \\ 3\text{行} - 2\text{行} \times 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + 2w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x = 0,\ y = 0,\ z = -2w$ より $w = -c_4$ とおくと，$x = 0,\ y = 0,\ z = 2c_4$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2c_4 \\ -c_4 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ v_4 = c_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_4 \neq 0)$$

よって，固有値 $\lambda = -2,\ -1,\ 1,\ 2$ に対する固有ベクトルはそれぞれ

$$c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (c_1 \neq 0), \quad c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ (c_2 \neq 0), \quad c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ (c_3 \neq 0), \quad c_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ (c_4 \neq 0)$$

(3) $A^n\boldsymbol{b}$ を求めるために $\boldsymbol{b}$ を固有ベクトルの線形結合で表す.

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix},$$

とおき, $\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3+c_4\boldsymbol{v}_4$ となる $c_1,\ c_2,\ c_3,\ ,c_4$ を求める.

$$\begin{pmatrix}3\\2\\-3\\0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

これより, 次の連立方程式が成り立つ. $\begin{cases}2c_2+c_3&=3\\c_2+c_3&=2\\c_1-3c_2-3c_3+2c_4&=-3\\-c_1+c_2+c_3-c_4&=0\end{cases}$ ,

これを解くと, $c_1=c_2=c_3=c_4=1$　　$\therefore\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4$

$$A\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-3&4&0&0\\-2&3&0&0\\6&1&6&8\\-2&-3&-4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}=-2\boldsymbol{v}_1$$

$$A\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-3&4&0&0\\-2&3&0&0\\6&1&6&8\\-2&-3&-4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{v}_2$$

$$A\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-3&4&0&0\\-2&3&0&0\\6&1&6&8\\-2&-3&-4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}_3$$

$$A\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}-3&4&0&0\\-2&3&0&0\\6&1&6&8\\-2&-3&-4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\\-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{v}_4$$

$A\boldsymbol{v}_1=-2\boldsymbol{v}_1,\ A\boldsymbol{v}_2=-\boldsymbol{v}_2,\ A\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_3,\ A\boldsymbol{v}_4=2\boldsymbol{v}_4$

$\therefore\ A^n\boldsymbol{v}_1=(-2)^n\boldsymbol{v}_1,\ A^n\boldsymbol{v}_2=(-1)^n\boldsymbol{v}_2,\ A^n\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_3,\ A^n\boldsymbol{v}_4=2^n\boldsymbol{v}_4$

$A^n\boldsymbol{b}=A^n(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4)=A^n\boldsymbol{v}_1+A^n\boldsymbol{v}_2+A^n\boldsymbol{v}_3+A^n\boldsymbol{v}_4=(-2)^n\boldsymbol{v}_1+(-1)^n\boldsymbol{v}_2+1^n\boldsymbol{v}_3+2^n\boldsymbol{v}_4$

$$=(-2)^n\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+(-1)^n\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}+1^n\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\(-2)^n\\-(-2)^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2(-1)^n\\(-1)^n\\-3(-1)^n\\(-1)^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2^{n+1}\\-2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-1)^n+1\\(-1)^n+1\\(-2)^n-3(-1)^n-3+2^{n+1}\\-(-2)^n+(-1)^n+1-2^n\end{pmatrix}$$

《　ポイント　(3) の別解　》　$A$ を対角化して，$A^n$ を求めて利用する.

$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $P^{-1}$ を求める.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\text{行} - 2\text{行} \times 1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{行} - 1\text{行} \times 1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{3\text{行} + (1\text{行} + 2\text{行}) \times 3 \\ 4\text{行} - (1\text{行} + 2\text{行})}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\text{行} + 3\text{行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\text{行} - 4\text{行} \times 2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{各行を並べ替える}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-2\\1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&4&0&0\\-2&3&0&0\\6&1&6&8\\-2&-3&-4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&1&1&0\\1&-3&-3&2\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&2&4\\-1&1&0&0\\-1&2&0&0\\0&4&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&1&1&0\\1&-3&-3&2\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^n=P(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)P^{-1}$$

$$=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&1&1&0\\1&-3&-3&2\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}0&-1&-1&-2\\1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\0&1&1&0\\1&-3&-3&2\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^n&1&0&\\0&(-1)^n&0&0\\0&0&1^n&0\\0&0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&-1&-2\\1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&2(-1)^n&1&0\\0&(-1)^n&1&0\\(-2)^n&-3(-1)^n&-3&2(2^n)\\-(-2)^n&(-1)^n&1&-2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&-1&-2\\1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2(-1)^n-1&-2(-1)^n+2&0&0\\(-1)^n-1&-(-1)^n+2&0&0\\-3(-1)^n+3&-(-2)^n+3(-1)^n-6+4(2^n)&-(-2)^n+2(2^n)&-2(-2)^n+2(2^n)\\(-1)^n-1&(-2)^n-(-1)^n+2-2(2^n)&(-2)^n-(2^n)&2(-2)^n-2^n\end{pmatrix}$$

$$A^n\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2(-1)^n-1&-2(-1)^n+2&0&0\\(-1)^n-1&-(-1)^n+2&0&0\\-3(-1)^n+3&-(-2)^n+3(-1)^n-6+4(2^n)&-(-2)^n+2(2^n)&-2(-2)^n+2(2^n)\\(-1)^n-1&(-2)^n-(-1)^n+2-2(2^n)&(-2)^n-(2^n)&2(-2)^n-2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\{2(-1)^n-1\}+2\{-2(-1)^n+2\}\\3\{(-1)^n-1\}+2\{-(-1)^n+2\}\\3\{-3(-1)^n+3\}+2\{-(-2)^n+3(-1)^n-6+4(2^n)\}-3\{-(-2)^n+2(2^n)\}\\3\{(-1)^n-1\}+2\{(-2)^n-(-1)^n+2-2(2^n)\}-3\{(-2)^n-(2^n)\}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6(-1)^n-3-4(-1)^n+4\\3(-1)^n-3-2(-1)^n+4\\-9(-1)^n+9-2(-2)^n+6(-1)^n-12+8(2^n)+3(-2)^n-6(2^n)\\3(-1)^n-3+2(-2)^n-2(-1)^n+4-4(2^n)-3(-2)^n+3(2^n)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2(-1)^n+1\\(-1)^n+1\\(-2)^n-3(-1)^n-3+2^{n+1}\\-(-2)^n+(-1)^n+1-2^n\end{pmatrix}$$