第１章　微分積分 I《 § 1 微分 》

$\boxed{21}$ 閉関数 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能である関数 $f(x)$ に対して，次の命題（平均値の定理) が成り立つ.

ある $c(a<c<b)$ が存在して

$(*)$ $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

次の問いに答えよ.

(1) $f(x)=x^2$ のとき，区間 (a,b) において，$(*)$ が成り立つような c を求めよ.

(2) 閉区間 $[a,b]$ で連続かつ，開区間 (a,b) で 2 回微分可能でつねに $f''(x)>0$ を満たす関数 $f(x)$ を考える．このとき，区間 (a,b) において関数
$$F(x)=\frac{f(b)(x-a)+f(a)(b-x)}{b-a}-f(x)$$
はつねに正であり，かつ $F(x)$ の極大値が区間 (a,b) において，ただ 1 つだけ存在することを示せ.

(3) $b>a>1$ とする．次の不等式が成り立つことを示せ.
$$\frac{b^2-a^2}{2ab}>\log\frac{b}{a}$$

(島根大)

《　ポイント　**平均値の定理**　》

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続で，開区間 (a,b) で微分可能であるとき
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(a<c<b)$$
を満たす c が少なくとも 1 つ存在する．特に，$f(a)=f(b)$ の場合を **ロルの定理** という.

[解]

(1) $f(x)=x^2$ より，$f'(x)=2x$ だから，$(*)$ は $\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=2c$

よって，$c=\dfrac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\dfrac{(b+a)(b-a))}{2(b-a)}=\dfrac{a+b}{2}$

(2) $F(x)>0$ **を示すために，**$F(x)$ **の増減を調べる．**

$$F'(x)=\frac{f(b)(1-0)+f(a)(0-1)}{b-a}-f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)$$

ここで，平均値の定理より
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(a<c<b)$$
を満たす c が存在する．よって　$F'(c)=f'(c)-f'(c)=0$

題意より，$f''(x)>0$ だから
$$F''(x)=0-f''(x)=-f''(x)<0$$
よって，$F'(x)$ は単調減少するから，

$F'(c)=0$ を満たす c はただ 1 つだけ存在する.

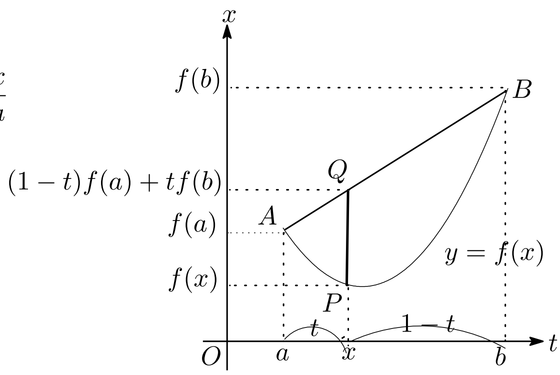
x	a	$\ldots$	c	$\ldots$	b
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$F(c)$	$\searrow$	0

ゆえに，$a<x<c$ のとき，$F'(x)>0$　　$c<x<b$ とき，$F'(x)<0$

したがって，増減表は右上のようになる.

増減表より，区間 (a,b) で $F(x)>0$ であり，$F(x)$ の極大値は区間 (a,b) でただ 1 つだけ存在する.

《注》 **F(x) の意味を考えてみよう.**



$t=\dfrac{x-a}{b-a}$ とおくと,

$1-t=\dfrac{b-a}{b-a}-\dfrac{x-a}{b-a}=\dfrac{b-a-(x-a)}{b-a}=\dfrac{b-x}{b-a}$

$F(x)=\dfrac{f(b)(x-a)+f(a)(b-x)}{b-a}-f(x)$

$=f(b)\dfrac{x-a}{b-a}+f(a)\dfrac{b-x}{b-a}-f(x)$

$=f(b)\cdot t+f(a)\cdot(1-t)-f(x)$

$=(1-t)f(a)+tf(b)-f(x)$

3 点を $A(a,f(a)),\ B(b,f(b)),\ Q(x,y)$ とする.

$y=(1-t)f(a)+tf(b)$ とおくと,

$y=\dfrac{(1-t)f(a)+tf(b)}{(1-t)+t}$

よって, y は線分 $f(a),f(b)$ を $t:(1-t)$ に内分する点である.

従って, 点 $Q(x,y)$ は線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点であるから,

x も線分 a,b を $t:(1-t)$ に内分する点である.

よって, $x=\dfrac{(1-t)a+tb}{(1-t)+t}$

$\therefore\quad x=(1-t)a+tb$

題意より, $f''(x)>0$ であるから, $y=f(x)$ のグラフは下に凸である.

よって, $F(x)$ は図の PQ の長さになる.

(3) 《　ポイント　》 $\mathbf{\dfrac{b^2-a^2}{2ab}>\log\dfrac{b}{a}\iff\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}-2\log\dfrac{b}{a}}$ より, $\mathbf{x-\dfrac{1}{x}-2\log x}$ を考える.

$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\log x\quad(x\geqq 1)$ とおくと $f(x)=x-x^{-1}-2\log x$

ゆえに, $f'(x)=1-(-1)x^{-1-1}-2\cdot\dfrac{1}{x}=1+x^{-2}-\dfrac{2}{x}=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2\geqq 0$

$f'(1)=\left(1-\frac{1}{1}\right)^2=0\qquad f1)=1-\frac{1}{1}-2\log 1=0$ だから, 増減表は図のようになる.

x	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

増減表より, $x>1$ のとき, $f(x)>0$

題意 $b>a>1$ より, $\dfrac{b}{a}>1$ だから

$f\left(\dfrac{b}{a}\right)>0$

よって, $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}-2\log\dfrac{b}{a}=\dfrac{b^2-a^2}{ab}-2\log\dfrac{b}{a}>0$

ゆえに, $\dfrac{b^2-a^2}{ab}>2\log\dfrac{b}{a}$

$\dfrac{b^2-a^2}{2ab}>\log\dfrac{b}{a}$

【別解】$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とした場合の **(2)** から得られる不等式を **a** から **b** まで積分する.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とすると　$f(x)=x^{-1}$ だから

$f'(x)=(-1)x^{(-1)-(-1)}=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

$f''(x)=(-1)(-2)x^{(-2)-(-1)}=2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}$

$b>a>1$ のとき，開区間 (a,b) で　$f''(x)>0$
よって，(2) より，開区間 (a,b) で

$$F(x)=\frac{f(b)(x-a)+f(a)(b-x)}{b-a}-f(x)>0$$

$$\frac{\frac{1}{b}(x-a)+\frac{1}{a}(b-x)}{b-a}>\frac{1}{x}$$

従って　$\displaystyle\int_a^b \frac{\frac{1}{b}(x-a)+\frac{1}{a}(b-x)}{b-a}dx>\int_a^b\frac{1}{x}dx$

左辺 $\displaystyle=\int_a^b\frac{a(x-a)+b(b-x)}{ab(b-a)}dx=\int_a^b\frac{-(b-a)x+(b-a)(b+a)}{ab(b-a)}dx$

$\displaystyle=\int_a^b\frac{-x+a+b}{ab}dx=\frac{1}{ab}\left[-\frac{1}{2}x^2+(a+b)x\right]_a^b$

$\displaystyle=\frac{1}{ab}\left\{\left(-\frac{1}{2}b^2+(a+b)b\right)-\left(-\frac{1}{2}a^2+(a+b)a\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{ab}\left(-\frac{1}{2}(b^2-a^2)+(b^2-a^2)\right)=\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right)=\frac{b^2-a^2}{2ab}$

右辺$\displaystyle=\int_a^b\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_a^b=\log b-\log a=\log\frac{b}{a}$

$\therefore\quad \dfrac{b^2-a^2}{2ab}>\log\dfrac{b}{a}$

【注】$y=\dfrac{\frac{1}{b}(x-a)+\frac{1}{a}(b-x)}{b-a}$ は直線で,

左辺の定積分は台形の面積だから

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(b-a)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b+a}{ab}\right)(b-a)=\dfrac{b^2-a^2}{2ab}$