第 3 章　線形代数《 § 4　ベクトル空間 》

$\boxed{217}$　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，下の問いに答えよ.

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 曲線 $C : 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ の A による像 C' の方程式を求め，C の概形を図示せよ.

(長岡技術大)

[解]　《　要項 52 ②　》正則な行列の表す線形変換による図形の像を求めるには，次の方法がある.
もとの図形上の点を (x, y)，その点の像を (x', y') とする．x', y' は x, y の式で表される.
② 逆変換を用いて x, y を x', y' で表す　$\longrightarrow$　元の図形の方程式に代入する.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求める.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2 行} - \text{1 行} \times 1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{1 行} - \text{2 行} \times 1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \therefore\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

《　公式　》2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$

このとき，A の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

[別解]$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{1 \times 2 - 1 \times 1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 曲線 $C : 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ の任意の点 (x, y) の A による像を (x', y') とおくと.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より　　$A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' - y' \\ -x' + y' \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x = 2x' - y',\ y = -x' + y'$

これを $C : 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ に代入して,

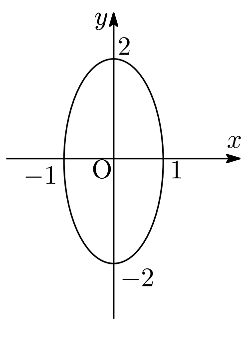
$$5(2x' - y')^2 + 12(2x' - y')(-x' + y') + 8(-x' + y')^2 - 4 = 0$$

$$5(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + 12(-2x'^2 + 3x'y' - y'^2) + 8(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 4 = 0$$

$$20x'^2 - 20x'y' + 5y'^2 - 24x'^2 + 36x'y' - 12y'^2 + 8x'^2 - 16x'y' + 8y'^2 - 4 = 0$$

$4x'^2 + y'^2 = 4 \qquad \therefore\ x'^2 + \dfrac{y'^2}{2^2} = 1$

よって，C' の方程式は $x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$



[別解]

$C : 5x^2+12xy+8y^2$

$=x(5x+6y)+y(6x+8y)$

$=\begin{pmatrix} 5x+6y & 6x+8y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ここで，$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は ${}^t(A^{-1})=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

この両辺の転置行列を求めると，

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}{}^t(A^{-1})$

$C : 5x^2+12xy+8y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}{}^t(A^{-1})\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}(A^{-1})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=4x'^2+y'^2$

$\therefore\ 4x'^2+y'^2=4 \qquad x'^2+\dfrac{y'^2}{2^2}=1$

よって，C' の方程式は $x^2+\dfrac{y^2}{2^2}=1$