第 3 章　線形代数《 § 4　ベクトル空間 》

$\boxed{223}$　空間ベクトル $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $(a_1,\ a_2)$ からグラフシュミットの正規直交法を用いて，正規直交系 $(u_1,\ u_2)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた $u_1,\ u_2$ を含む R^3 の正規直交基底を 1 組求めよ.

(名古屋工業大)

《　ポイント　》グラフシュミットの直交法

与えられた R^3 のベクトル $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ から，次のように正規直交系（大きさ 1 のベクトルで，互いに直交するベクトルの組）

$\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ を作る方法 $A,\ B,\ C$ が n 次正方行列，O が n 次の零行列のとき，

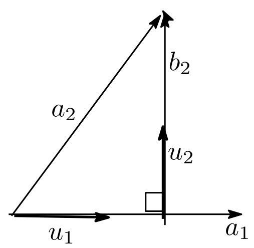
(1) $u_1 = \dfrac{a_1}{|a_1|}$ とする.（ u_1 は a_1 の大きさ 1 にしたもの ）

(2) $b_2 = a_2 - (a_2 \cdot u_1)u_1$ とおき，$u_2 = \dfrac{b_2}{|b_2|}$ とする.

（ b_2 は a_1 と a_2 で張られる平面上にあり，u_1 と直交なもの ）

(3) $b_3 = a_3 - (a_3 \cdot u_1)u_1 - (a_3 \cdot u_2)u_2$ とおき，$u_3 = \dfrac{b_3}{|b_3|}$ とする.

（ b_3 は $u_1,\ u_2$ に垂直なもの ）



[解]

(1) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$|a_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ だから，

$$u_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(a_2 \cdot u_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{2 \times 1 + (-1) \times 1 + 3 \times 0\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b_2 = a_2 - (a_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって，$u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $u_1,\ u_2$ に垂直で大きさ 1 のベクトルを求めめる.

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする.

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1\times 2-(-1)\times 0 \\ 0\times 1 - 1\times 2 \\ 1\times(-1)-1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

《　ポイント　》外積 $v_1 \times v_2$ は v_1 と v_2 に垂直

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ は R^3 の正規直交基底である.

《　ポイント　》u_3 が u_1 と u_2 に直交することを確認するた.

$u_1 \neq 0,\ u_3 \neq 0$ より

$$u_1 \cdot u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1\times 1 + 1\times(-1) + 0\times(-1)\} = 0$$

$\therefore\ u_2 \perp u_3$

$u_1 \neq 0,\ u_3 \neq 0$ より

$$u_2 \cdot u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \{1\times 1 + (-1)\times(-1) + 2\times(-1)\} = 0$$

$\therefore\ u_2 \perp u_3$

[別解]　ベクトル $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を線形独立なベクトル $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとり，直交化する.

$b_3 = a_3 - (a_3 \cdot u_1)u_1 - (a_3 \cdot u_2)u_2$

$$(a_3 \cdot u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1\times 1 + 0\times 1 + 0\times 0\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(a_3 \cdot u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{1\times 1 + 0\times(-1) + 0\times 0\} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6-3-1 \\ 0-3-(-1) \\ 0-0-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$