第 3 章　線形代数《 § 4　ベクトル空間 》

$\boxed{236}$ $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x$ 　($a_0,\ a_1,\ a_2$ は実定数) の形の実関数全体を作る実線形空間 V の内積

$(g,h) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx$ 　$(g,\ h \in V)$

を導入する．以下の問いに答えよ

(1) 3 つの関数 $1,\ \cos x,\ \sin x$ は互いに直交することを示し，これらを正規化して 正規直交基底を作れ．

(2) 線形変換 $F : f(x) \to f(x+c)$ について，(1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ．ここで c は実定数である．

(筑波大)

[解]

(1) 《　ポイント　》定義に従って内積を計算する．

$$(1,\ \cos x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \sin\pi - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0$$

$$(1,\ \sin x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} = (-\cos\pi) - \big(-\cos(-\pi)\big) = -(-1) + (-1) = 0$$

$$(\cos x,\ \sin x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin 2x dx = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cos 2\pi - \cos(-2\pi)\right) = -\frac{1}{4}(1-1) = 0$$

よって，$1,\ \sin x,\ \cos x$ は互いに直交する．

《　ポイント　》関数 f の大きさは $\sqrt{(f,\ f)}$

$$(1,\ 1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = \Big[x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi$$

よって，1 の大きさは $\sqrt{2\pi}$

$$(\cos x,\ \cos x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\pi + \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \left(-\pi + \frac{1}{2}\sin(-2x)\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{(\pi+0) - (-\pi+0)\right\} = \frac{1}{2}\times 2\pi = \pi$$

よって，$\cos x$ の大きさは $\sqrt{\pi}$

$$(\sin x,\ \sin x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - \left(-\pi - \frac{1}{2}\sin(-2x)\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{(\pi-0) - (-\pi-0)\right\} = \frac{1}{2}\times 2\pi = \pi$$

よって，$\sin x$ の大きさは $\sqrt{\pi}$

ゆえに，$1,\ \cos x,\ \sin x$ の正規直交基底は，$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\right\}$ である．

(2) 《　ポイント　》基底が f_1, f_2, f_3, 表現行列が A のとき,

$$(F(f_1)\ \ F(f_2)\ \ F(f_3)) = (\ \ f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ )A$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x+c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos x\cos c - \sin x\sin c)$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x+c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x\cos c - \cos x\sin c)$$

$$\left(F\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\quad F\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\right)\quad F\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\right)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x+c)\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x+c)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\cos x\cos c - \sin x\sin c)\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x\cos c + \cos x\sin c)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\quad \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & -\sin c & \cos c \end{pmatrix}$$

従って, F の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & -\sin c & \cos c \end{pmatrix}$$