第４章　応用数学《 § 2　ラプラス変換・フーリエ解析 》

$\boxed{246}$ 次の問いに答えよ.

(1) $f(t) = \sin wt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{w}{s^2 + w^2}$ であることを示せ.

(2) $f(t) = \cos wt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{3}{s^2 + w^2}$ であることを示せ.

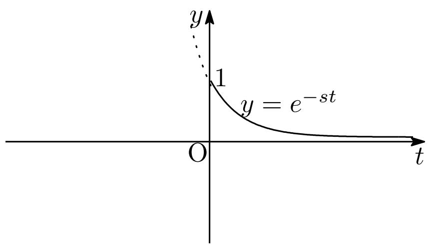
(3) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{as + b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大)

[解] 《　ポイント　》$y = e^{-st}$ の図から分かるように,

$t \longrightarrow 0$ のとき，$e^{-st} \longrightarrow 1$

$t \longrightarrow \infty$ のとき，$e^{-st} \longrightarrow 0$



(1) 《　ポイント　》$\displaystyle\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$

$$\mathcal{L}[\cos wt] = \int_0^\infty e^{-st} \cos wt dt = \left[\frac{e^{-st}}{(-s)^2 + w^2}(-s \cos wt + w \sin wt) \right]_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{e^0}{(-s)^2 + w^2}(-s \cos 0 + w \sin 0) = -\frac{1}{s^2 + w^2}(-s + 0) = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

【注】$w = 0$ のとき，$\displaystyle\mathcal{L}[\cos wt] = \mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{s} e^0 \right) = \frac{1}{s}$

$\dfrac{s}{s^2 + w^2} = \dfrac{s}{s^2 + 0^2} = \dfrac{1}{s}$ だから，$w = 0$ のときも成り立つ.

(2) 《　ポイント　》$\displaystyle\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$

$$\mathcal{L}[\sin wt] = \int_0^\infty e^{-st} \sin wt dt = \left[\frac{e^{-st}}{(-s)^2 + w^2}(-s \sin wt - w \cos wt) \right]_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{e^0}{(-s)^2 + w^2}(-s \sin 0 - w \cos 0) = -\frac{1}{s^2 + w^2}(0 - w) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

【注】$w = 0$ のとき，$\displaystyle\mathcal{L}[\sin wt] = \mathcal{L}[0] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 0 dt = 0$

$\dfrac{w}{s^2 + w^2} = 0$ だから，$w = 0$ のときも成り立つ.

(3) $\mathcal{L}[a+bt]=\int_0^{\infty}e^{-st}(a+bt)dt=a\int_0^{\infty}e^{-st}dt+b\int_0^{\infty}te^{-st}dt$

ここで, $a\int_0^{\infty}e^{-st}dt=a\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}=-\frac{a}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}=-\frac{a}{s}\left(0-e^0\right)=-\frac{a}{s}(-1)=\frac{a}{s}$

$\left(-\frac{1}{s}te^{-st}\right)'=-\frac{1}{s}\left(1\cdot e^{-st}+t\cdot(-s)e^{-st}\right)=-\frac{1}{s}e^{-st}+te^{-st}$

$te^{-st}=\left(-\frac{1}{s}te^{-st}\right)'+\frac{1}{s}e^{-st}$

$\int_0^{\infty}te^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}dt$

$=(0-0)+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}$

$=-\frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}=-\frac{1}{s^2}(0-e^0)=-\frac{1}{s^2}(-1)=\frac{1}{s^2}$

$b\int_0^{\infty}te^{-st}dt=b\frac{1}{s^2}=\frac{b}{s^2}$ であるから,

$\mathcal{L}[a+bt]=\int_0^{\infty}e^{-st}(a+bt)dt=a\int_0^{\infty}e^{-st}dt+b\int_0^{\infty}te^{-st}dt$

$=\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}=\frac{as+b}{s^2}$