# 第 4 章　応用数学《 § 2　ラプラス変換・フーリエ解析 》

$\boxed{256}$ 次の各問いに答えよ.

(1) $f(t) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ.

(2) フーリエの積分定理 (逆変換を利用して，次の積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\cos u}{1+u^2}\,du$$

(九州大)

《　ポイント　》

フーリエ変換　$\mathcal{F}[f(x)] = F(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$

逆フーリエ変換　$\mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du$

フーリエの積分定理　$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du$

反転公式　$f(x)$ が $x$ で連続ならば $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)]$

[解]

(1) 《　ポイント　》$x < 0$ の範囲で $|x| = -x$，$x \geqq 0$ の範囲で $|x| = x$.

$$\lim_{x \to \infty} e^{-(1\pm iu)x} = \lim_{x \to \infty} e^{-x}(\cos ux \pm i\sin ux) = 0$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iux}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-iux}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iux}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-iu)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+iu)x}dx$$

$$= \left[\frac{1}{1-iu}e^{(1-iu)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{1+iu}e^{-(1+iu)x}\right]_{0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{1-iu}e^0 - 0\right\} + \left\{0 - \left(-\frac{1}{1+iu}\right)e^0\right\}$$

$$= \frac{1}{1-iu} + \frac{1}{1+iu} = \frac{(1+iu)}{(1-iu)(1+iu)} + \frac{(1-iu)}{(1-iu)(1+iu)} = \frac{2}{1-i^2u^2} = \frac{2}{1+u^2}$$

(2) 《　ポイント　》オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を使って実部と虚部に分ける.

(1) より，$f(x) = e^{-|x|}$ に対し，$F(u) = \mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{2}{1+u^2}$

$f(x) = e^{-|x|}$ が連続だから，フーリエの積分定理を適用すると，

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+u^2}e^{iux}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iux}}{1+u^2}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ux}{1+u^2}du + i\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ux}{1+u^2}du$$

実部を比較すると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ux}{1+u^2}du = \pi e^{-|x|}$

この等式に $x = 1$ を代入して，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos u}{1+u^2}du = \pi e^{-1} = \pi\cdot\frac{1}{e} = \frac{\pi}{e}$

被積分関数は偶関数だから，$\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos u}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2e}$