第 4 章　応用数学《 § 3 複素関数 》

$\boxed{261}$　1 次分数関数 $\omega = \dfrac{z-i}{z+2}$ による，z 平面上の単位円 $|z|=1$ の ω 平面への像を求めよ．

(北海道大)

[解]《　ポイント　》　z を ω で表し，z を満たす式に代入する．また，$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ も利用する．

$\omega = \dfrac{z-i}{z+2}$ より，$\omega z + 2\omega = z - i$，よって，$(\omega - 1)z = -2\omega - i$

$\therefore\ z = \dfrac{-2\omega - i}{\omega - 1}$

これを $|z|=1$ に代入すると，$\left|\dfrac{-2\omega - i}{\omega - 1}\right| = 1$˙ これより，$|2\omega + i| = |\omega - 1|$

両辺を 2 乗して，$|2\omega + i|^2 = |\omega - 1|^2$　$\cdots\cdots(*)$

実数 u, v について，$\omega = u + vi$ $(u,\ v$ は実数$)$　とおくと，

$2\omega + i = 2(u+vi) + i = 2u + (2v+1)i$ より，$|2\omega + i|^2 = \left(\sqrt{(2u)^2 + (2v+1)^2}\right)^2 = (2u)^2 + (2v+1)^2$

$\omega - 1 = (u+vi) - 1 = (u-1) + vi$ より，$|\omega - 1|^2 = \left(\sqrt{(u-1)^2 + v^2}\right)^2 = (u-1)^2 + v^2$

これらを $(*)$ に代入すると，$(2u)^2 + (2v+1)^2 = (u-1)^2 + v^2$

$4u^2 + 4v^2 + 4v + 1 = u^2 - 2u + 1 + v^2$,

$3u^2 + 2u + 3v^2 + 4v = 0$

$u^2 + \dfrac{2}{3}u + v^2 + \dfrac{4}{3}v = 0 \therefore\ u^2 + \dfrac{2}{3}u + \dfrac{1}{9} + v^2 + \dfrac{4}{3}v + \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$

$\left(u + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(v + \dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$

よって，中心が $-\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}i$，半径が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ の円に移る．

[別解]《　ポイント　》$\omega = u + vi$ とおかないで解く方法，$z\overline{z} = |z|^2$ を利用する．

$z = x+yi$ $(x, y$ は実数$)$ とおくと，$z\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = |z|^2$

(1) の $(*)$ より，$|2\omega + i|^2 = |\omega - 1|^2$

$(2\omega + i)(\overline{2\omega + i}) = (\omega - 1)(\overline{\omega - 1})$

$(2\omega + i)(2\overline{\omega} - i) = (\omega - 1)(\overline{\omega} - 1)$

$4\omega\overline{\omega} - 2\omega i + 2\overline{\omega} i + 1 = \omega\overline{\omega} - \omega - \overline{\omega} + 1$

$3\omega\overline{\omega} + (1-2i)\omega + (1+2i)\overline{\omega} = 0$

$\omega\overline{\omega} + \dfrac{1-2i}{3}\omega + \dfrac{1+2i}{3}\overline{\omega} = 0$

$\omega\overline{\omega} + \dfrac{1-2i}{3}\omega + \dfrac{1+2i}{3}\overline{\omega} + \left(\dfrac{1-2i}{3}\right)\left(\dfrac{1+2i}{3}\right) = \left(\dfrac{1-2i}{3}\right)\left(\dfrac{1+2i}{3}\right)$

$\left(\omega + \dfrac{1+2i}{3}\right)\left(\overline{\omega} + \dfrac{1-2i}{3}\right) = \dfrac{5}{9}$ より，$\left(\omega + \dfrac{1+2i}{3}\right)\left(\overline{\omega + \dfrac{1+2i}{3}}\right) = \dfrac{5}{9}$

これから，$\left|\omega + \dfrac{1+2i}{3}\right|^2 = \dfrac{5}{9}$ であるから，$\therefore\ \left|\omega + \dfrac{1+2i}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

したがって，中心が $-\dfrac{1+2i}{3}$ で，半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ の円に移る．