第１章　微分積分 I《 § 2 積分 》

$\boxed{28}$ 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$

(名古屋大)

【解】《　ポイント　》$\sqrt{a^2-x^2}$ を含む関数である．要項 11(3) を用いる.

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$　の範囲では $\cos\theta \geqq 0$ だから $\sqrt{\cos\theta} = \cos\theta$ に注意する.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ より $\sin^2 2\theta = 4sin^2\theta\cos^2\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2[\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

(1) $x = \sin\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より $dx = \cos\theta d\theta$ だから

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta = \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) = \frac{\pi}{16}$$

【別解】　《　ポイント　》要項 11(5) ウォリス積分：n を 2 以上の整数とするとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (\text{nが偶数}) \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & (\text{nが奇数}) \end{cases}$$ を利用する.

$x = sin\theta$ おくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より $dx = \cos\theta d\theta$ だから

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta(1-\sin^2\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta - \sin^4\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

(2)　《 ポイント 》　a^2+x^2 を含む関数であり，要項 11(4) を用いる．また偶数関数であることに注意する．

a^2+x^2 は，$x=\tan\theta$ と置き換えるとよい．θ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$x=0$ のとき，$\tan\theta=0\quad\therefore\theta=0\qquad x=1$ のとき，$\tan\theta=1\quad\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)d\theta$$

$$=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\begin{array}{c}1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\\ \cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}\end{array}}$$

【注】(2) は積分区間が $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ より，要項 11(5) は使えない．