

第 5 章 確率統計 《 § 1 確率統計 》

280 n を自然数, p を $0 < p < 1$ を満たす定数とする. また, 点 X が地点 A か地点 B のどちらかにあるとする.

X に対し, 次の規則に従って, 操作を行う.

- 規則
- X が A にあるときは確率 p で X を A にとどめ, 確率 $1-p$ で X を B に移動する.
 - X が B にあるときは, 必ず X を A に移動する.

最初に X が A にあるとき, n 回の操作の後に X が A にある確率を a_n で表す.

例えば, $a_1 = p$ である. 以下の間に答えよ.

- (1) a_2 を求めよ.
- (2) a_{n+1} を p と a_n を用いて表せ.
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(長岡技科大)

《 ポイント 1 》漸化式 $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$ ($\alpha \neq 0$) は,

$$a_{n+1} - \frac{\beta}{1-\alpha} = \alpha \left(a_n - \frac{\beta}{1-\alpha} \right)$$

と変形できる. 数列 $\left\{ a_n - \frac{\beta}{1-\alpha} \right\}$ は公比 α の等比数列になる.

《 ポイント 》 n 回の操作の後に, B がある確率が $1 - a_n$ であることを利用する.

[解]

- (1) $a_2 = a_1 \times p + (1 - a_1) \times 1 = p \times p + (1 - p) = p^2 - p + 1$
- (2) $a_{n+1} = a_n \times p + (1 - a_n) \times 1 = (p - 1)a_n + 1$
- (3) 《ポイント 1》を利用しても良いが, 思い出せないときは, 次のようにすれば良い.

$$a_{n+1} = (p - 1)a_n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

① を次のように変形すると,

$$a_{n+1} + \alpha = (p - 1)(a_n + \alpha)$$

$$a_{n+1} + \alpha = (p - 1)a_n + \alpha(p - 1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \alpha = \alpha(p - 1) - 1$$

$$(2 - p)\alpha = -1 \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{2 - p}$$

よって, ① は次のように変形できる.

$$a_{n+1} - \frac{1}{2 - p} = (p - 1) \left(a_n - \frac{1}{2 - p} \right)$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{2-p} = (p-1) \left(a_n - \frac{1}{2-p} \right)$$

よって、次のような式が成り立つ.

$$a_2 - \frac{1}{2-p} = (p-1) \left(a_1 - \frac{1}{2-p} \right)$$

$$a_3 - \frac{1}{2-p} = (p-1) \left(a_2 - \frac{1}{2-p} \right)$$

$$a_4 - \frac{1}{2-p} = (p-1) \left(a_3 - \frac{1}{2-p} \right)$$

.....

$$a_{n-1} - \frac{1}{2-p} = (p-1) \left(a_{n-2} - \frac{1}{2-p} \right)$$

$$a_n - \frac{1}{2-p} = (p-1) \left(a_{n-1} - \frac{1}{2-p} \right)$$

これらを辺々掛けて整理すると.

$$a_n - \frac{1}{2-p} = (p-1)^{n-1} \left(a_1 - \frac{1}{2-p} \right)$$

$$\therefore a_n - \frac{1}{2-p} = (p-1)^{n-1} \left(p - \frac{1}{2-p} \right)$$

これより,

$$a_n - \frac{1}{2-p} = (p-1)^{n-1} \frac{p(2-p)-1}{2-p} = (p-1)^{n-1} \frac{-p^2+2p-1}{2-p} = (p-1)^{n-1} \frac{-(p^2-2p+1)}{2-p}$$

$$= (p-1)^{n-1} \frac{-(p-1)^2}{2-p} = (p-1)^{n-1} \frac{-(p-1)^2}{2-p} = -\frac{(p-1)^{n+1}}{2-p}$$

$$\therefore a_n - \frac{1}{2-p} = -\frac{(p-1)^{n+1}}{2-p}$$

$$a_n = \frac{1}{2-p} - \frac{(p-1)^{n+1}}{2-p}$$

$$a_n = \frac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p}$$

ここで, $0 < p < 1$ より, $-1 < p-1 < 0$ だから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p-1)^{n+1} = 0 \text{ である.}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2-p}$$