

第5章 確率統計《 § 1 確率統計 》

283 n を自然数とする、箱 A には赤玉 1 個、白玉 2 個が入っている。箱 B には赤玉 2 個、白玉 1 個が入っている。

まず、箱 A と箱 B でたがために選び、次に、選んだ箱から復元抽出で n 回繰り返す、玉を取り出す。下の問いに答えよ。

- (1) $n = 1$ のとき、赤玉が取り出される確率を求めよ。
- (2) n 回すべてで、赤玉が取り出される確率を求めよ。
- (3) n 回すべてで、赤玉が取り出される条件の下で、 $n + 1$ 回目も赤玉を取り出される条件付き確率 q_n を求めよ。

(長岡技科大)

[解]

- (1) 1 回目に箱 A から赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$,

1 回目に箱 B から赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$,

よって、1 回目に赤玉が出る確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- (2) 箱 A を選び、 n 回すべて赤玉を取り出す確率は、 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

箱 B を選び、 n 回すべて赤玉を取り出す確率は、 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

よって、 n 回すべて赤玉が出る確率は、

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 + 2^n) = \frac{1 + 2^n}{2 \cdot 3^n}$$

- (3) n 回すべて赤玉を取り出した場合、箱 A から選ばれた確率は、

$$\frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{1 + 2^n}$$

n 回すべて赤玉を取り出した場合、箱 B から選ばれた確率は、

$$\frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

n 回すべて赤玉を取り出した箱 A から $(n + 1)$ 回目も赤玉を選ぶ確率は、 $\frac{1}{1 + 2^n} \times \frac{1}{3}$

n 回すべて赤玉を取り出した箱 B から $(n + 1)$ 回目も赤玉を選ぶ確率は、 $\frac{2^n}{1 + 2^n} \times \frac{2}{3}$

したがって、求める条件付き確率 q_n は、

$$q_n = \frac{1}{1 + 2^n} \times \frac{1}{3} + \frac{2^n}{1 + 2^n} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3(1 + 2^n)} + \frac{2^{n+1}}{3(1 + 2^n)} = \frac{1 + 2^{n+1}}{3(1 + 2^n)}$$

[(3):別解] 《 ポイント 》 ベイズの定理

事象 $A_1, A_2, \dots, A_n$, は互いに排反で, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ (全事象), $P(A_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

とする. このとき, $P(B) > 0$ である事象 B に対し,

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)}$$

$P_B(A_k)$ は事後確率と呼ばれ, $P(A_k|B)$ と表すときもある.

求める条件付確率 q_n は,

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} + \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 + 2^{n+1})}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 + 2^n)} \\ &= \frac{1 + 2^{n+1}}{3(1 + 2^n)} \end{aligned}$$