

第 5 章 確率統計 《 § 1 確率統計 》

290 1 つのさいころを 6 の目が出るまで投げ続け、投げた回数を X とする。以下の問に答えよ。

- (1) 確率 $P(X=1)$, $P(X=2)$ を求めよ。
 (2) 自然数 n に対して、確率 $P(X=n)$ を求めよ。
 (3) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(長岡技科大)

《 ポイント 》 X の期待値 $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$; または, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
 $|r| < 1$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$ を利用する。

[解]

$$(1) P(X=1) = \frac{1}{6}, \quad P(X=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

$$(2) P(X=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

- (3) さいころを k 回投げて、6 の目が初めて出た場合の確率は、(2) より、

$$P(X=k) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \text{ であるから,}$$

$$E(X) = \sum_1^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_1^{\infty} k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \text{ を求めればよい.}$$

$$S_n = \sum_1^n k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \text{ とすると,}$$

$$\frac{5}{6} \cdot S_n = \sum_1^n k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

ここで、

$$S_n = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$\frac{5}{6} \cdot S_n = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

あから、

$$S_n - \frac{5}{6} \cdot S_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \right\}}{1 - \frac{5}{6}} - n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\therefore S_n = 6 - 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 6 - 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \right\} = 6$$