

第 5 章 確率統計 《 § 1 確率統計 》

298 同時確率密度関数

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(x - y) & (0 \leq y < x \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

をもつ連続な確率変数 X, Y を考える.

- (1) X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ求めよ.
- (2) X, Y の期待値 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めよ.
- (3) X, Y の分散 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(筑波大)

[解]

- (1) 《 ポイント 》 同時確率密度関数 $f(x, y)$ を持つ連続型 2 次元確率変数 (X, Y) について,

$$X \text{ の周辺確率密度関数 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$Y \text{ の周辺確率密度関数 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ $f_X(x), f_Y(y)$ とおくと, $0 \leq y < x \leq 1$ より, $0 \leq y < x, y \leq x \leq 1$ だから, 定義より,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x 6(x - y) dy & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$\text{ここで, } \int_0^x 6(x - y) dy = \left[6xy - 3y^2 \right]_0^x = 6x^2 - 3x^2 = 3x^2 \text{ だから,}$$

$$\therefore f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x 6(x - y) dy = 3x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

同様に,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 6(x - y) dx & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$\text{ここで, } \int_y^1 6(x - y) dx = \left[3x^2 - 6xy \right]_y^1 = (3 - 6y)(3y^2 - 6y^2) = 3 - 6y + 3y^2 \text{ だから,}$$

$$\therefore f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 6(x - y) dx = 3 - 6y + 3y^2 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(2) 《 ポイント 》 確率密度関数 $f(x)$ の期待値は $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

(1) で求めた確率密度関数を利用する．定義から，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 xf_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2dx = \int_0^1 3x^3dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 yf_Y(y)dy = \int_0^1 y(3-6y+3y^2)dy = \int_0^1 (3y-6y^2+3y^3)dy \\ &= \left[\frac{3}{2}y^2-2y^3+\frac{3}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{3}{2}-2+\frac{3}{4} = \frac{6}{4}-\frac{8}{4}+\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(3) 《 ポイント 》 確率密度関数 $f(x)$ の分散は $V(X) = \dots = E(X^2) - (E(X))^2$

(2) で求めた期待値を利用する．定義から，

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^1 x^2f_X(x)dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2dx - \frac{9}{16} = \int_0^1 3x^4dx - \frac{9}{16} = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 - \frac{9}{16} \\ &= \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48}{80} - \frac{45}{80} = \frac{3}{80} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 = \int_0^1 y^2f_Y(y)dy - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \int_0^1 y^2(3-6y+3y^2)dx - \frac{1}{16} = \int_0^1 (3y^2-6y^3+3y^4)dx - \frac{1}{16} \\ &= \left[y^3 - \frac{6}{4}y^4 + \frac{3}{5}y^5\right]_0^1 - \frac{1}{16} \\ &= 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{16} = \frac{80}{80} - \frac{120}{80} + \frac{48}{80} - \frac{5}{80} = \frac{3}{80} \end{aligned}$$