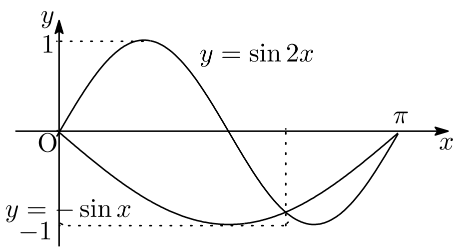
第１章　微分積分 I《 § 1 積分　》

$\boxed{34}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，２つの曲線 $y = -\sin x$ と $y = \sin 2x$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(山口大)

《　ポイント　》 交点の左右でグラフの上下関係が変わるため，２つの部分に分けて計算する．



解

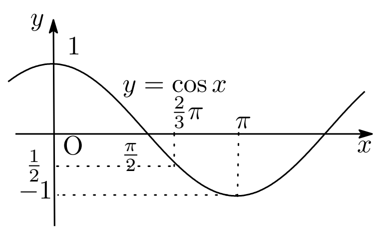
$0 < x < \pi$ での交点の x 座標を求める．

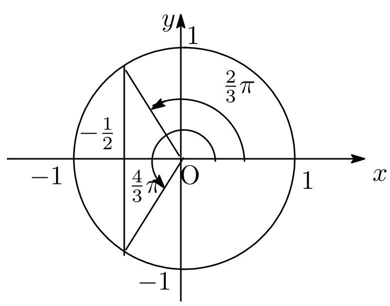
$\sin 2x = -\sin x$ より，$2\sin x\cos x + \sin x = 0$　　$\sin x(2\cos x + 1) = 0$

$\therefore\ \sin x\left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right) = 0$

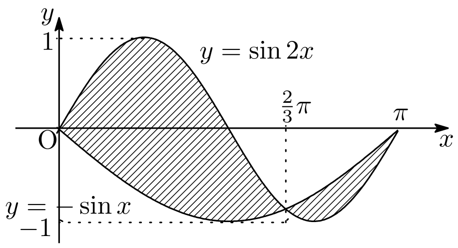
$0 < x < \pi$ より，$\sin x > 0$ だから，$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

《　ポイント　》解法はグラフから理解し易いが，細かいところは分かりにくい，その点，単位円は細かいところまで分かって解決し易い．





$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ より，　　$\therefore\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$



$0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$-\sin x \leqq \sin 2x$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき　$\sin 2x \leqq -\sin 2$

よって求める面積を S とおくと

$$S = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \{\sin 2x - (-\sin x)\}\,dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \{(-\sin x) - \sin 2x\}\,dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin 2x + \sin x)dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \cos x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{4}{3}\pi - \cos\frac{2}{3}\pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 - \cos 0\right)$$

$$= \left\{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} - \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{4}$$

また

$$\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (-\sin x - \sin 2x)dx = \left[\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$= \left(\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 2\pi\right) - \left(\cos\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\cos\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) - \left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ゆえに

$$S = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin 2x + \sin x)dx \quad + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (-\sin x - \sin 2x)dx = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$