第 1 章　微分積分 I《 § 1 積分　 》

$\boxed{45}$

次の媒介変数で表された曲線 $x = f(t) = \cos^3 t,\ y = g(t) = \sin^3 t$ について以下の問いに答えよ.

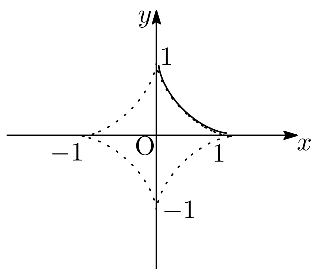
(1) この曲線を通常何と呼んでいるか答えよ.

(2) $f'(t)$ と $g'(t)$ を求めよ.

(3) t の範囲を $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とした時の曲線の長さ L を求めよ.

(高知大)

【解】



(1) アステロイド曲線

(2) $f'(t) = 3\cos^2 t(-\sin t) = -3\cos^2 t \sin t, \qquad g'(t) = 3\sin^2 t \cos t$

《　ポイント (12)　 》 曲線 $x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ l は

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

(3) $\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2 = (-3\cos^2 t \sin t)^+(3\sin^2 t \cos t)^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t$

$$= 9sin^2t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9sin^2t\cos^2 t$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9sin^2t\cos^2 t}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t dt$$

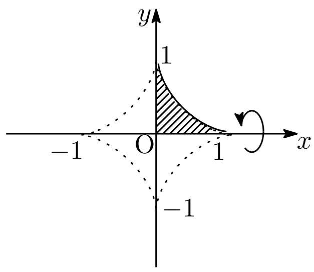
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{3}{4}\left[\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3}{4}(-1-1) = \frac{3}{2}$$

【注】　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より, $\sin t\cos t \geqq 0$ だから

$$\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t} = sint\cos t$$

【参考】　曲線 $x = f(t) = \cos^3 t,\ y = g(t) = \sin^3 t,\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸, y 軸で囲まれる画面を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.



$V = \pi \displaystyle\int_0^1 y^2 dx$

ここで, $t = 0$ のとき $x = \cos^3 0 = 1$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $x = \cos^3 \dfrac{\pi}{2} = 0$

$\dfrac{dx}{dt} = 3\cos^2 t(-\sin t) = -3\sin t(1 - \sin^2 t) = 3\sin^3 t - 3\sin t$

$dx = (3\sin^3 t - 3\sin t)dt$, であるから

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin^3 t)^2 (3\sin^3 t - 3\sin t)dt = 3\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t(\sin^3 t - \sin t)dt$$

$$= 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-\sin^6 t(\sin^3 t - \sin t)\}dt = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^9 t + \sin^7 t)dt$$

$$= 3\pi \left\{ -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt \right\}$$

《　ポイント　》$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$（$n$ は 0 以上の整数）とするとき, 次の公式が成り立つ.

$n \geqq 2$ のとき,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{（nが偶数のとき）} \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & \text{（nが奇数のとき）} \end{cases}$$

従って,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\ , \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

が成り立つから,

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt = -\frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \left(-\frac{8}{9} + 1\right) = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{315}$$

$$\therefore\ V = 3\pi \left\{ -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt \right\} = 3\pi \cdot \frac{16}{315} = \frac{16}{105}\pi$$