

第 2 章 微分積分 II 《 § 1 関数の展開 》

54

数列 $0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ は

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

という漸化式によって生成される. k が十分大きな値になると, $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ はどのような値に収束するか.

(筑波大)

《 ポイント 》 極限値 λ を予想し, $\frac{f_{k+1}}{f_k} = -\lambda$ について不等式をつくる.

$k = 1, 2, 3, \dots$ とする. 漸化式から $f_k > 0$ である. $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ を $f_k > 0$ で割ると $\frac{f_{k+1}}{f_k} = 1 + \frac{f_{k-1}}{f_k}$ である.

$a_k = \frac{f_k}{f_{k-1}}$ とおくと, $a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k}$ であり, 明らかに $a_k \geq 1$ である.

この数列が収束すると仮定して, $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ とおく.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_k} \right)$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} \text{ より } \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{よって, } a_k \geq 1 \text{ より } \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

λ の値を用いて, この λ に収束することを証明する.

$$a_{k+1} = 1 + \frac{1}{a_k} \text{ から } \lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} \text{ を引くと}$$

$$a_{k+1} - \lambda = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{\lambda} \quad \therefore a_{k+1} - \lambda = -\frac{1}{\lambda a_k} (a_k - \lambda)$$

$$\text{これに } \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ と}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \text{ を代入すると,}$$

$$a_{k+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2a_k} \left(a_k - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

絶対値をとると

$$\left| a_{k+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{5} - 1}{2a_k} \right| \left| a_k - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right|$$

$$a_n \geq 1 \text{ より } \left| a_{k+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \left| a_k - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right|$$

$$\text{よって, } \left| a_{k+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| \leq \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^k \left| a_k - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right|$$

$$\text{ここで, } 0 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1 \text{ より } \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^k = 0 \text{ であるから, } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| a_{k+1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| = 0$$

$$\text{よって, } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ より, } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

《 ポイント 》 この数列 $\{f_n\}$ をフィボナッチ数列という。連続するフィボナッチ数の比の極限值 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ は黄金数と呼ばれる。一般解 f_k を直接求めてみよう。

フィボナッチ数列のような漸化式を定数係数の線形漸化式という。線形漸化式は、線形微分方程式と同じような方法で解くことができる。

線形微分方程式の解は比数関数 $e^{\lambda x}$ を基本とするが、線形漸化式では初項 1、公比 λ の等比数列の一般解 λ^{n-1} を基本とする。

等比数列の一般項を $f_k = \lambda^{k-1}$ とすると、 $f_{k+1} - f_k - f_{k-1} = 0$ を満たすことから、

$\lambda^k - \lambda^{k-1} - \lambda^{k-2} = 0$ すなわち、特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ を満たす。

よって、 $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。

《 ポイント 》 線形微分方程式の一般解と同じように、線形漸化式の一般解は 2 つの等比数列の線形結合で表される。

微分方程式と同様に初期値を満たすように定数を定める。

ここで、

$$f_k = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k-1}$$

とすると、この f_k も漸化式を満たす。ここで C_1, C_2 を求める。

$$k = 1 \text{ のとき } f_1 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2$$

$$k = 2 \text{ のとき } f_2 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ここで、数列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ を数列 $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \dots$ とおいたので、 $f_1 = 1, f_2 = 1$ であるから。

$$f_1 = C_1 + C_2 = 1$$

$$f_2 = C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

これを解くと

$$C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + (1 - C_1) \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \quad \text{よって、} \quad C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - C_1 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$C_1(1 + \sqrt{5}) - C_1(1 - \sqrt{5}) = 2 - (1 - \sqrt{5}) \quad \text{より、} \quad C_1 \cdot 2\sqrt{5} = 1 + \sqrt{5}$$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= 1 - C_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5} - (-1 + \sqrt{5})}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

よって,

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$\therefore f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

$$\therefore \frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \left\{ (1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1} \right\}}{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left\{ (1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k \right\}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1+\sqrt{5})^{k+1} - (1-\sqrt{5})^{k+1}}{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^k - \frac{1}{1+\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^{k+1}}{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{k+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k}$$

ここで, $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right| < 1$ より $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k = 0$ であるから,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_{k+1}}{f_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{k+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-0}{1-0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

《 ポイント 》線形微分方程式の解法を数列に置き換えると、線形漸化式を解くことができる。

線形漸化式 $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ (ただし, $\alpha \neq \beta$) について

特性方程式 $\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ の解は, $\lambda = \alpha, \lambda = \beta$ より,

次のように変形できる.

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} - \beta a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

同様にして

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

そこで, $b_n = a_{n+2} - \beta a_{n+1}, C_n = a_{n+2} - \alpha a_{n+1}$ とおくと.

$$b_{n+1} = \alpha b_n, c_{n+1} = \beta c_n \text{ となり.}$$

b_n は公比 α の等比数列であり, c_n は公比 β の等比数列である.

よって, それらの一般項は

$$b_{n+1} = (a_{n+1} - \beta a_n) = C_1 \alpha^{n-1}$$

$$c_{n+1} = (a_{n+1} - \alpha a_n) = C_2 \beta^{n-1}$$

初項条件より, $n = 1$ を代入す,

$$C_1 = a_2 - \beta a_1, C_2 = a_2 - \alpha a_1$$

$$(a_{n+1} - \beta a_n) - (a_{n+1} - \alpha a_n) = C_1 \alpha^{n-1} - C_2 \beta^{n-1}$$

$$(\alpha - \beta)a_n = C_1 \alpha^{n-1} - C_2 \beta^{n-1} \quad \therefore a_n = \frac{C_1 \alpha^{n-1} - C_2 \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

《ポイント》線形漸化式的一般項は特性方程式の解を公比とする 2 つの等比数列の線形結合で表される。
フィボナッチ数列の場合

数列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ を数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ とおいたので, $a_1 = 1, a_2 = 1$ で,

漸化式は, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ となるから,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ とおくと. } \lambda = 1 + \frac{1}{\lambda} \quad \therefore \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\text{これを解いて, } \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ だから } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ とおくと}$$

$$a_n = \frac{C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$\text{ここで, } C_1 = a_2 - \beta a_1 = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad C_2 = a_2 - \alpha a_1 = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ より,}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right\} \quad \therefore a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^n - \frac{1}{1+\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} \end{aligned}$$

ここで、 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = 0 \text{ であるから,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$