第 2 章　微分積分 II《 § 1 関数の展開　》

$\boxed{62}$ 一般項が $a_n \geqq 0$ の級数（正項級数）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 対して，次を示せ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ は収束する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ は収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ は収束しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないときがある．

それぞれ具体的な例を示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束，発散に関係なく，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ は収束する．

(徳島大)

《　ポイント ①　》

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束

《　ポイント ②　》 正則級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ において，$a_n \leqq b_n$ のとき

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散　$\Longrightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散

[解]

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n \geqq 0$ より，

$\dfrac{a_n}{1+a_n} \leqq a_n$　$\dfrac{a_n}{1+na_n} \leqq a_n$ が成り立つ．

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$，　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ も収束する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ が収束するから，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$

ここで 十分大きな N をとると，$n \geqq N$ のとき，　$\dfrac{a_n}{1+a_n} < \dfrac{1}{2}$ $\cdots$③

$a_n \geqq 0$ より，$1 + a_n > 0$ だから，

③ の両辺に $2(1 + a_n)$ を掛けると，

$2a_n < 1 + a_n$　$\therefore\ a_n < 1$　よって，$0 \leqq a_n < 1$

したがって，$\dfrac{a_n}{1+a_n} \geqq \dfrac{a_n}{!+1} = \dfrac{a_n}{2}$

$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ が収束するから，$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ も収束する．

また，有限和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} a_n$ も収束する．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(3) $a_n = \begin{cases} k^2 & (n \text{ が平方数 } k^2 \text{のとき}) \\ 0 & (n \text{ が平方数 } k^2 \text{以外のとき}) \end{cases}$ （ k は自然数 ） とする．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^2 \cdot k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 \cdot k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ は収束する．

一方で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k^2$ は発散するから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} k^2$ より，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

(4) $a_n = 0$ のとき，明らかに，を $\dfrac{a_n}{1+n^2 \cdot a_n} < \dfrac{1}{n^2}$

$a_n > 0$ のとき，$\dfrac{a_n}{1+n^2 \cdot a_n} < \dfrac{a_n}{n^2 \cdot a_n} = \dfrac{1}{n^2}$

したがって，つねに，$\dfrac{a_n}{1+n^2 \cdot a_n} < \dfrac{1}{n^2}$ が成り立つ．

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ は収束する．