第 2 章　微分積分 II《 § 1 関数の展開　》

67

関数 $f(x)$ は開区間　$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ において

$$f(x) = \log\cos x$$

で定義されているとする．このとき次の問いに答えよ．ただし対数は自然数である．

(1) $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大)

【解】

(1) $f(x) = \log\cos x,\qquad \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ より

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$f''(x) = -\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = -\frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x\cdot\cos x - (-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'''(x) = -\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\left\{-\frac{(\cos^2 x)'}{(\cos^2 x)^2}\right\} = \frac{2\cos x\cdot(\cos x)'}{\cos^4 x} = \frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{-2\sin x}{\cos^3 x}$$

《　別解　》 $f''(x) = -\cos^{-2} x$　より

$$f'''(x) = -(-2)\cos^{(-2)-1}\cdot(\cos x)' = 2\cos^{-3}\cdot(-\sin x) = \frac{-2sinx}{\cos^3 x}$$

(2) 《　ポイント　》 マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

剰余項は $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\quad (0 < \theta < 1)$

$f(0) = \log\cos 0 = \log 1 = 0$　　　　$f'(0) = -\tan 0 = 0$

$f''(0) = -\frac{1}{\cos^2 0} = -\frac{1}{1^2} = -1$　　　　$f'''(0) = \frac{-2\sin 0}{[\cos^3 0} = \frac{-2\cdot 0}{1^3} = 0$ より

$f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開すると．

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + R_3(x) = 0 + 0\cdot x + \frac{-1}{2}x^2 + R_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 + R_3(x)$$

剰余項 $R_3(x)$ を求めると．

$$R_3(x) = \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 = \frac{1}{3!}\frac{-2sin\theta x}{\cos^3\theta x}x^3 = -\frac{\sin\theta x}{3\cos^3\theta x}x^3\qquad (0 < \theta < 1)$$

(3) 《　ポイント　》 まず，$\log\cos^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ の極限を考え，(2) の結果を利用する．

$x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とおくと，$n=\dfrac{1}{x^2}$

$n\to\infty$ のとき，$x\to+0$ となるから，

$$\lim_{n\to\infty}\log\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\log\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\log\cos x=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+R_3(x)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+0}\frac{R_3(x)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+0}\frac{-\dfrac{\sin\theta x}{3\cos^3\theta x}x^3}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+0}\left(-\frac{\sin\theta x}{3\cos^3\theta x}x\right)=-\frac{1}{2}$$

【別解】$x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とおくと，$n=\dfrac{1}{x^2}$

$n\to\infty$ のとき，$x\to+0$ となるから，

$$\log\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n\log\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\log\cos x=\frac{\log\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\log\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\log\cos x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{(\log\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'}{2x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2x}$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x}=-\left(1\cdot\frac{1}{2\cdot1}\right)=-\frac{1}{2}$$