第 1I 章　微分積分 II《 § 2 偏微分 》

$\boxed{74}$

1 次の式で与えられる陰関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

(筑波大)

《　ポイント　》z が x, y の 2 変数関数であるとして, 両辺を x, y で偏微分する.

z を x で偏微分するとき. $\Longrightarrow$ （ y は定数のような扱えでよい. ）

z を y で偏微分するとき. $\Longrightarrow$ （ x は定数のような扱えでよい. ）

[解]

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$$

$$xy^{-1} + yz^{-1} + zx^{-1} = 1$$

(1) 両辺を x で偏微分する.

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^{-1}) + \frac{\partial}{\partial x}(yz^{-1}) + \frac{\partial}{\partial x}zx^{-1} = 0$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^{-1}) = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot y^{-1} = 1 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz^{-1}) = y \cdot \frac{\partial z^{-1}}{\partial x} = y \cdot (-1)z^{-2} = -\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}zx^{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x^{-1} + z \cdot \frac{\partial x^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{x} + z \cdot (-1)x^{-2} = \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2}$$

より,

$$\frac{1}{y} - \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x^2} - \frac{1}{y}$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x^2} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}} = \frac{x^2yz^2\left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right)}{x^2yz^2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{z^2}\right)}$$

$$= \frac{yz^3 + x^2z^2}{xyz^2 + x^2y^2} = \frac{z^2(yz + x^2)}{xy(z^2 + xy)} \qquad (z^2 + xy \neq 0)$$

(2) 両辺を y で偏微分する.

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1})+\frac{\partial}{\partial y}(yz^{-1})+\frac{\partial}{\partial y}(zx^{-1})=0$$

$$x\cdot\frac{\partial y^{-1}}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial y}\cdot z^{-1}+y\cdot\frac{\partial z^{-1}}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot x^{-1}=0$$

$$x\cdot(-1)y^{-2}+1\cdot z^{-1}+y\cdot(-1)z^{-2}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot x^{-1}=0$$

$$x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{z}+y\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{1}{x}=0$$

$$-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}-\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{z}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{z^2}}=\frac{xy^2z^2\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{z}\right)}{xy^2z^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{z^2}\right)}$$

$$=\frac{x^2z^2-xy^2z}{y^2z^2-xy^3}=\frac{xz(xz-y^2)}{y^2(z^2-xy)}\qquad(z^2-xy\neq 0)$$

【注】 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=1$ の出題なので, $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0$ と考えてよい.