第 1I 章　微分積分 II《 § 2 偏微分 》

$\boxed{81}$

$x+2y+z+e^{2z}-1=0$ から定まる陰関数 $z=f(x,\ y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) $z=f(x,\ y)$ が表す曲面上の点 $(x,\ y,\ z)=(-2,\ 1,\ 0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $f(x,\ y)$ の原点 $(x,\ y)=(0,\ 0)$ における変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めよ．

(筑波大)

[解]

(1) $x+2y+z+e^{2z}-1=0\cdots(*)$ で定める z を $x,\ y$ の 2 変数関数とみなす．

$(*)$ を x で偏微分すると，$1+\dfrac{\partial z}{\partial x}+2e^{2z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ より

$(1+2e^{2z})\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1 \qquad \therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{1+2e^{2z}}$

$(*)$ を y で偏微分すると，$2+\dfrac{\partial z}{\partial y}+2e^{2z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ より

$(1+2e^{2z})\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2 \qquad \therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2}{1+2e^{2z}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{1+2e^{2z}}\right)=-\left\{-\frac{(1+2e^{2z})'}{(1+2e^{2z})^2}\right\}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\frac{4e^{2z}}{(1+2e^{2z})^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4e^{2z}}{(1+2e^{2z})^2}\left(-\frac{1}{1+2e^{2z}}\right)=-\frac{4e^{2z}}{(1+2e^{2z})^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{1+2e^{2z}}\right)=-\left\{-\frac{(1+2e^{2z})'}{(1+2e^{2z})^2}\right\}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{4e^{2z}}{(1+2e^{2z})^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4e^{2z}}{(1+2e^{2z})^2}\left(-\frac{2}{1+2e^{2z}}\right)=-\frac{8e^{2z}}{(1+2e^{2z})^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2}{1+2e^{2z}}\right)=-2\left\{-\frac{(1+2e^{2z})'}{(1+2e^{2z})^2}\right\}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=\frac{8e^{2z}}{(1+2e^{2z})^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{8e^{2z}}{(1+2e^{2z})^2}\left(-\frac{2}{1+2e^{2z}}\right)=-\frac{16e^{2z}}{(1+2e^{2z})^3}$$

(2) 《　ポイント 21　》 (1) 曲面 $z=f(x,\ y)$ 上の点 $(a,\ b,\ f(a,\ b))$ における接線の方程式は

$$z-f(a,\ b)=f_x(a,\ b)(x-a)+f_y(a,\ b)(y-b)$$

(2) 曲面 $f(x,\ y,\ z)=0$ 上の点 $(a,\ b,\ c)$ における接平面の方程式

$$f_x(a,\ b,\ c)(x-a)+f_y(a,\ b,\ c)(y-b)+f_z(a,\ b,\ c)(z-c)=0$$

【解１】$x+2y+z+e^{2z}-1=0$　この式において，$z=f(x,\ y)$ とおくと，

x で偏微分すると，

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}+2e^{2z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad (1+2e^{2z})\frac{\partial z}{\partial x}=-1 \therefore \ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1+2e^{2z}}$$

y で偏微分すると，

$$2+\frac{\partial z}{\partial y}+2e^{2z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (1+2e^{2z})\frac{\partial z}{\partial y}=-2 \therefore \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2}{1+2e^{2z}}$$

よって，点 $(x,\ y,\ z)=(-2,1,0)$ における接平面の方程式は，

$$z-0=\left\{-\frac{1}{1+2e^{2\cdot 0}}\right\}\{x-(-2)\}+\left\{-\frac{2}{1+2e^{2\cdot 0}}\right\}(y-1)$$

$$z=\left\{-\frac{1}{3}\right\}(x+2)+\left\{-\frac{2}{3}\right\}(y-1)$$

$$z=-\frac{1}{3}(x+2)-\frac{2}{3}(y-1)$$

$$3z=-x-2-2y+2 \qquad \therefore \ x+2y+3z=0$$

【解２】$f(x,\ y,\ z)=x+2y+z+e^{2z}-1$ とおくと，

$f_x(x,y,z)=1$ より，$f_x(-2,1,0)=1$

$f_y(x,y,z)=2$ より，$f_y(-2,1,0)=2$

$f_z(x,y,z)=1+2e^{2z}$ より，$f_z(-2,1,0)=1+2e^{2\cdot 0}=3$

よって，点 $(x,\ y,\ z)=(-2,1,0)$ における接平面の方程式は，

$$1\cdot\{x-(-2)\}+2\cdot(y-1)+3\cdot(z-0)=0$$

$$x+2+2y-2+3z=0 \qquad \therefore \ x+2y+3z=0$$

(3) 《　ポイント 22　》2 変数関数のテイラーの定理　　　($h = x - a,\ k = y - b$)

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)h^2 + f_{xy}(a,b)hkf_{yy}(a,b)k^2\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,\ b+\theta k) \quad (0 < \theta < 1)$$

$x + 2y + z + e^{2z} - 1 = 0 \cdots (*)$

$(*)$ で，$x = y = 0$ とした方程式 $z + e^{2z} - 1 = 0$ を満たす $z = f(0,0)$ の値を考える．

$h(z) = z + e^{2z} - 1$ とおくと，$h(z)$ は連続であり，$h'(z) = 1 + 2e^{2z} > 0$ だから，$h(z)$ は単調増加する．

また，$\displaystyle\lim_{z \to -\infty} h(z) < 0$ かつ $\displaystyle\lim_{z \to \infty} h(z) > 0$ だから，$h(z) = 0$ を満たす z の値は 1 つに限られる．

ここで，$h(0) = 0 + e^0 - 1 = 0$ だから，方程式 $z + e^{2z} - 1 = 0$ を満たす z の値は $z = f(0,0) = 0$ のみである．

$z = f(x,y)$ に注意して，

$f_x = -\dfrac{1}{1+2e^{2z}}$ より，$f_x(0,0) = -\dfrac{1}{1+2e^{2\cdot 0}} = -\dfrac{1}{3}$

$f_y = -\dfrac{2}{1+2e^{2z}}$ より，$f_y(0,0) = -\dfrac{2}{1+2e^{2\cdot 0}} = -\dfrac{2}{3}$

$f_{xx} = -\dfrac{4e^{2z}}{(1+2e^{2z})^3}$ より，$f_{xx}(0,0) = -\dfrac{4e^{2\cdot 0}}{(1+2e^{2\cdot 0})^3} = -\dfrac{4}{27}$

$f_{xy} = -\dfrac{8e^{2z}}{(1+2e^{2z})^3}$ より，$f_{xy}(0,0) = -\dfrac{8e^{2\cdot 0}}{(1+2e^{2\cdot 0})^3} = -\dfrac{8}{27}$

$f_{yy} = -\dfrac{16e^{2z}}{(1+2e^{2z})^3}$ より，$f_{yy}(0,0) = -\dfrac{16e^{2\cdot 0}}{(1+2e^{2\cdot 0})^3} = -\dfrac{16}{27}$

よって，

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right) + \cdots$$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{27}x^2 - 2\cdot\frac{8}{27}xy - \frac{16}{27}y^2\right) + \cdots$$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{27}x^2 - \frac{8}{27}xy - \frac{8}{27}y^2 + \cdots$$

《　ポイント　》1 次の項までが接平面を表す．

$z = f(x,y)$ 上の点 $(x,y,z) = (-2,1,0)$ における接平面の方程式は，

$z = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y$