第 1I 章　微分積分 II《 § 2 偏微分 》

90

a は負でない実数とするとき，関数 $f(x,y)=x^4+y^4-4axy$ の極値を求めよ．

また，極値をとるときの x, y の値を求めよ．

(東京科学大)

《　ポイント　》関数 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で $f_x=f_y=0$ を満たすとき，

$H=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\{f_{xy}(a,b)\}^2$　とおくと，

(1)　$H>0$　のとき

$f_{xx}(a,b)>0$　ならば，$f(x,y)$ は点 $f(a,b)$ で極小である．

$f_{xx}(a,b)<0$　ならば，$f(x,y)$ は点 $f(a,b)$ で極大である．

(2)　$H<0$　のとき，$f(x,y)$ は点 $f(a,b)$ で極値をとらない．

(注)　$H=0$　のときの極値の判定は個別に考えること，

a の値によって場合分けする．

$f_x=4x^3-4ay=4(x^3-ay)=0$

$f_y=4y^3-4ax=4(y^3-ax)=0$

$f_x-f_y=4\{x^3-y^3+a(x-y)\}=4\{(x-y)(x^2+xy+y^2)+a(x-y)\}$

$=4(x-y)(x^2+xy+y^2+a)=0$　より，

$x=y$　また　は $x^2+xy+y^2+a=0$　である．

$x^2+xy+y^2+a=0$　のとき，

$x^2+xy+y^2+a=x^2+xy+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2-\left(\dfrac{y}{2}\right)^2+y^2+a$

$=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2+a\geqq 0$　　$\Longleftarrow$　(注)　a は負でない定数

等号成立は　$a=0$ で，$x=y=0$ である．

$y=x$ のとき，$f_x=0$ より

$f_x=4(x^3-ax)=4x(x^2-a)=0$　　$\therefore\ x=0,\ x=\pm\sqrt{a}$

よって，極値をもつ点は，$(0,0)$, $(\pm\sqrt{a},\ \pm\sqrt{a})$　（複合同順）である．

$f_{xx} = 12x^2, \qquad f_{xy} = -4a, \qquad f_{yy} = 12y^2$

$H = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 12x^2 \cdot 12y^2 - (-4a)^2 = 12x^2 \cdot 12y^2 - 16a^2 = 16(9x^2y^2 - a^2)$

a は負でない定数だから，$a > 0$ と $a = 0$ のときを調べる.

(i) $a > 0$ のとき

点 $(0, 0)$ で，$H = 16(9 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - a^2) = -16a^2 < 0$ より，極値をとらない.

点 $(\pm\sqrt{a},\ \pm\sqrt{a})$ (複合同順) で,

$H = 16\{9 \cdot (\pm\sqrt{a})^2 \cdot (\pm\sqrt{a})^2 - a^2\} = 16(9a^2 - a^2) = 16 \cdot 8a^2 = 128 > 0$

$f_{xx} = 12(\pm\sqrt{a})^2 = 12a > 0$ より, 次の極小値をとる.

$f(\pm\sqrt{a},\ \pm\sqrt{a}) = (\pm\sqrt{a})^4 + (\pm\sqrt{a})^4 - 4a(\pm\sqrt{a}) \cdot (\pm\sqrt{a}) = a^2 + a^2 - 4a^2 = -2a^2$

よって，点 $(\pm\sqrt{a},\ \pm\sqrt{a})$ (複合同順) で，極小値 $-2a^2$ をとる.

(ii) $a = 0$ のとき

点 $(0, 0)$ で，$H = 16(9 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - a^2) = -16a^2 = 0$ であるが;

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4 \cdot 0 \cdot xy = x^4 + y^4 \geqq 0 = f(0, 0)$ より 極小値 0 をとる.

よって，点 $(0, 0)$ で，極小値 0 をとる.