第 1I 章　微分積分 II《 § 2 偏微分 》

$\boxed{95}$

$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + xy - 2x + 2y \qquad \left((x,y) \in R^2\right)$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の極値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の閉領域 $E = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ における f の最大値と最小値を求めよ．

(東北大)

《　ポイント 23　》 **連続関数の最大値 · 最小値**

有界閉領域で連続関数 $z = f(x,y)$ は最大値と最小値をもつ．

最大値，最小値をとる点は

① 領域の内部のとき，$f_x = f_y = 0$ を満たす点

② 境界上にあるとき，条件付き極値をとり得る点

【注】有限な範囲におさまる領域を有界領域，境界まで含む領域を閉領域という．

極値をとり得る点と条件付き極値をとり得る点を求める．

(1) $f_x = 4x + y - 2 = 0,\ f_y = 4y + x + 2 = 0$ を解く，すなわち，次の連立方程式を解くと

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

解は $x = \dfrac{2}{3},\ y = -\dfrac{2}{3}$

よって，極値をとり得る点は $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$

$f_{xx} = 4,\ f_{xy} = 1,\ f_{yy} = 4$

$H = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4 \cdot 4 - 1^2 = 15 > 0$ であるから，$f_{xx} = 4 > 0$ より，次の極小値をとる．

$$f\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{8}{9} - \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{12}{9} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

よって，点 $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ で，極小値 $-\dfrac{4}{3}$ をとる．

(2) **条件 $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$，のもとで，関数 $f(x,y)$ の最大値 · 最小値を求める．**

$\varphi_x = 2x,\ \varphi_y = 2y$

$f_x - \lambda\varphi_x = 4x + y - 2 - \lambda(2x) = 4x + y - 2 - 2\lambda x = 0 \cdots ①$

$f_y - \lambda\varphi_y = 4y + x + 2 - \lambda(2y) = 4y + x + 2 - 2\lambda y = 0 \cdots ②$

$\varphi = x^2 + y^2 - 1 = 0 \cdots ③$

$① \times y - ② \times x$

$y(4x+y-2-2\lambda x) - x(4y+x+2-2\lambda y) = 4xy + y^2 - 2y - \lambda xy - 4xy - x^2 - 2x + 2\lambda xy = y^2 - x^2 - 2y - 2x$

$= (y + x)(y - x) - 2(y + x) = (y + x)(y - x - 2) = 0$

よって，$y=-x$，$y=x+2$

$y=x+2$ のとき，③ より

$x^2+(x+2)^2-1=x^2+x^2+4x+4-1=2x^2-4x+3=2(x^2-2x+1)+1=2(x+1)^2+1>0$

　これは実数解をもたない．

$y=-x$ のとき，③ より　$x^2+(-x)^2-1=2x^2-1=0$,　　$x^2=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x と y は異符号だから，　$y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，極値をとり得る点は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　(複号同順)

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}-2\sqrt(2)=\dfrac{3-4\sqrt{2}}{2}$

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3}{2}+2\sqrt{2}=\dfrac{3+4\sqrt{2}}{2}$

そこで，(1) の極小値 $-\dfrac{4}{3}$ と $\dfrac{3-4\sqrt{2}}{2}$ の大小を判定する．

$\dfrac{3-4\sqrt{2}}{2}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{9-12\sqrt{2}}{6}+\dfrac{8}{6}=\dfrac{17-12\sqrt{2}}{6}>0$

$\therefore\ \dfrac{3-4\sqrt{2}}{2}>-\dfrac{4}{3}$

《　ポイント 》 $17^2=289$, $(12\sqrt{2})^2=288$ より，$17>12\sqrt{2}$ だから，上記のようになる．

$$-\frac{4}{3}=-1.333\cdots,\qquad \frac{3-4\sqrt{2}}{2}=1.5-2\sqrt{2}=-1.3284\cdots$$

有界閉領域での最大値 · 最小値は内部の極値か，境界上の最大値 · 最小値だから

点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で，最大値 $\dfrac{3+4\sqrt{2}}{2}$

点 $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ で，最小値 $-\dfrac{4}{3}$