第３章　線形代数《§４　ベクトル空間》

$\boxed{230}$　a を定数，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$，とする．

線形写像 $f : R^3 \to R^3$ を $f(X) = AX$ と定める．f の核を $Kerf$，像を Imf で表す．
必要なら a による場合分けを行い．それぞれの場合に $Kerf$, Imf の次元を求める．
さらに $Kerf$, Imf の基底をそれぞれ１組ずつ求める．

(島根大)

《　ポイント　》文字がある場合でも，これまでと同様に解法を行う．場合分けも丁寧にする．

[解]

列 A の列ベクトルを順に v_1, v_2, v_3 とおくと．

$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\times 1]{2\text{行}-1\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ a-1 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(i)　$a = 1$ のとき，

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の階数 $rankA = 1$ より

$dimImf = 1,\ dimKerf = 3 - dimImf = 2$

$v_1 = v_2 = v_3$ より，

$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & v_1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= xv_1 + yv_1 + zv_1 = (x+y+z)v_1$ より

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$\{u_1\}$ は Imf の基底，$\{u_2,\ u_3\}$ は $Kerf$ の基底である．

(ii) $a \neq 1$ のとき,

① $\xrightarrow{a-1=1\text{とおく}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{行}-2\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{3\text{行}-1\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-2 \end{pmatrix}$ ……………②

$a=-2$ のとき, $rankA=2$ より, $dimImf=2,\ dimKerf=1$

② は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, より $v_3=-v_1-v_2$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & -v_1-v_2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & -v_1-v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=xv_1+yv_2+z(-v_1-v_2)=(x-z)v_1+(y-z)v_2$

ただし, $a=-2$ のとき $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって, $\{v_1,\ v_2\}$ は Imf の基底である.

$v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$Av_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=O$ より

$\{v_3\}$ は $Kerf$ の基底である.

$a \neq -2$ のとき, $rankA=3$ より, $dimImf=3,\ dimKerf=0$

$Imf=R^3$ より, $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ は Imf の基底である. $kerf$ の基底はない.

【注】 $a=-2$ のとき,

$w_1=\dfrac{1}{3}v_1+\dfrac{2}{3}v_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_2=\dfrac{2}{3}v_1+\dfrac{1}{3}v_2=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

とおくと, Imf の基底を, $\{w_1,\ w_2\}$ とすることもできる.

[別解]　《　ポイント　》行列 A の行列式 $|A|$ の値が 0 であるか否かでばあいわけする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\times 1]{2\text{行}-1\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ a-1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

$|A| = -(a-1)^2 - (a-1)^2 - a(a-1)^2 = -(a-1)^2(1+1+a) = -(a-1)^2(a+2)$ より

(i) $a \neq 1$ かつ $a \neq -2$　(ii) $a = 1$　(iii) $a = -2$　の 3 つの場合分けにする

(i) $a \neq 1$ かつ $a \neq -2$ のとき，$|A| \neq 0$ より

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$，$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$；$v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 1-a \end{pmatrix}$ は線形独立である．

$\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ は Imf の基底で，$dimImf = 3$ である．

次元定理より，$dimKerf = 0$ である．$Kerf$ の基底はない．

(ii) $a = 1$ のとき，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，u_1 は Imf の基底で，$dimImf = 1$ である．行基本変形すると，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\times 1]{2\text{行}-1\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\{u_2,\ u_3\}$ は $Kerf$ の基底で，$dimKerf = 2$ である．

(iii) $a = -2$　のとき，列基本変形すると，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{列}-1\text{列}\times 1]{3\text{列}+(1\text{列}+2\text{列})\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{列}\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{列}-2\text{列}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\{w_1,\ w_2\}$ は Imf の基底で，$dimImf = 2$ である．

行基本変形すると，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\text{行}+(1\text{行}+2\text{行})\times 1]{2\text{行}-1\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}-2\text{行}\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\{w_3\}$ は $Kerf$ の基底で，$dimKerf = 1$ である．