

第 1 章 微分積分 I 《 § 1 微分 》

11 次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における微分可能性を調べよ。ただし、逆三角関数は主値をとりものとする。

$$f(x) = \begin{cases} a|x| - x \tan^{-1} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

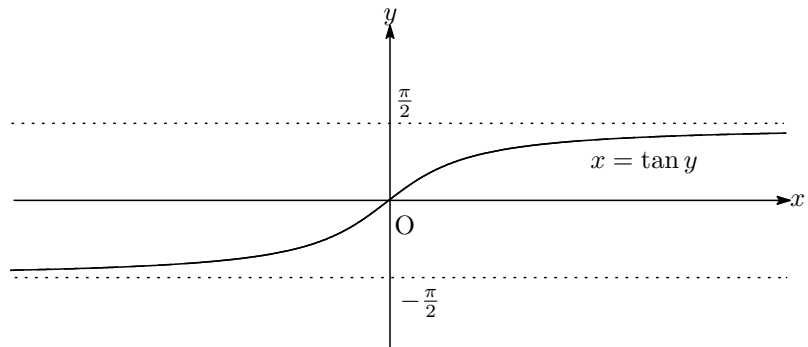
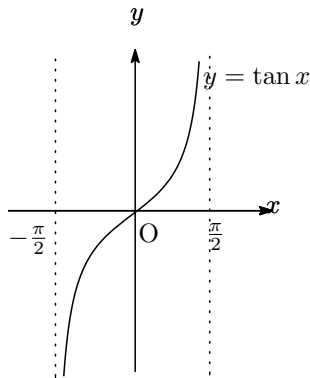
(筑波大)

《 ポイント $f(x)$ の $x=0$ における微分可能であることを示すには 》

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ が存在することを示せばよい。

左極限 $x \rightarrow -0$ と右極限 $x \rightarrow +0$ に分けて考え、微分係数 $f'(0)$ が存在するかどうか考える。

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ グラフは図のようになる。



$\frac{1}{x} = X$ とおくと、 $\tan^{-1} \frac{1}{x} = \tan^{-1} X$ そこで $Y = \tan^{-1} X$ とおくと $X = \tan Y$
 $x \rightarrow -0$ のとき $X \rightarrow -\infty$ より、 $\lim_{x \rightarrow -0} \tan^{-1} \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \tan^{-1} X = \lim_{X \rightarrow -\infty} Y = -\frac{\pi}{2}$
 $x \rightarrow +0$ のとき $X \rightarrow +\infty$ より、 $\lim_{x \rightarrow +0} \tan^{-1} \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \tan^{-1} X = \lim_{X \rightarrow +\infty} Y = \frac{\pi}{2}$

[解]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{a|x| - x \tan^{-1} \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{a(-x) - x \tan^{-1} \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} \left(-a - \tan^{-1} \frac{1}{x} \right) = -a - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -a + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a|x| - x \tan^{-1} \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{ax - x \tan^{-1} \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(a - \tan^{-1} \frac{1}{x} \right) = a - \left(+\frac{\pi}{2} \right) = a - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$-a + \frac{\pi}{2} = a - \frac{\pi}{2} \text{ となるのは、} a = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} a \neq \frac{\pi}{2} \text{ のとき、} f(x) \text{ は } x=0 \text{ で微分可能でない。} \\ a = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、} f(x) \text{ は } x=0 \text{ で微分可能である。} \end{cases}$$