

[選択項目] 年度：1991～2023 年 分野：10 行列式

0.1 n 次正方行列に関する以下の設問に答えよ.

(1) 1 つの行または列の全ての成分が 0 であるとき, その行列式の値は 0 であることを示せ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 12 \\ -1 & 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(3) B を n 次正方行列, x を n 次列ベクトルとする. $\overline{B}^T = -B$ のとき, $\overline{x}^T B x$ の値は 0 または純虚数であることを示せ. ここで, \overline{B}^T および \overline{x}^T はそれぞれ B と x の共役転置行列である.

(北海道大 2016) (m20160102)

0.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005) (m20050205)

0.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2005) (m20050210)

0.4 次の行列式の値を求めよ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

(北見工業大 2006) (m20060205)

0.5 次の行列 A の行列式の値 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(北見工業大 2007) (m20070205)

0.6 $\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ となる a を求めよ.

(北見工業大 2010) (m20100205)

0.7 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $|A| = 0$ となる x を求めよ.
 (2) $x = 2$ とするとき逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2013) (m20130206)

0.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) $|A| = 0$ となる x を求めよ.
 (2) $x = -1$ のとき, A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2014) (m20140204)

0.9 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190212)

0.10 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det B$ を求めよ.

(北見工業大 2022) (m20220207)

0.11 3つの行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

に関し, 次の問に答えよ.

- (1) 行列の和 $A + B$ と差 $A - B$ および積 AB を求めなさい.
 (2) 行列式 $|B|$ および $|C|$ の値を求めなさい. (3) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(岩手大 2006) (m20060302)

- 0.12** (1) 次の行列の積を求めなさい.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき, 次のものを求めなさい.

- (i) A の行列式 $|A|$ (ii) A の逆行列 A^{-1}

(3) 次の等式を証明しなさい.

$$\begin{vmatrix} a^2 + 1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2 + 1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2 + 1 & cd \\ da & db & dc & d^2 + 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1$$

(岩手大 2008) (m20080302)

0.13 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) A の行列式を求めなさい.
- (2) A の各成分の余因子を求めなさい.
- (3) A は正則であるかどうかを述べなさい, また, 正則ならば, A の逆行列を求めなさい.

(岩手大 2017) (m20170302)

0.14 次の行列の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(秋田大 2001) (m20010408)

0.15 次の \square に当てはまる整数を入れよ. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値は \square である.

(秋田大 2007) (m20070401)

0.16 下記の行列 A について, 次の問いに答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- (1) A の行列式を求めなさい.
- (2) A の逆行列を求めなさい.

(秋田大 2012) (m20120401)

0.17 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{pmatrix}$$

(秋田大 2013) (m20130405)

0.18 2次元ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ と実数 γ を用いて, ベクトル \mathbf{a} を

$$\mathbf{a} = \gamma(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$$

と定義し, ベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ を

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_2$$

と定義する. また, 行列 A, B を $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2)$, $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2)$ と定義する. このとき以下の設問 (1),(2),(3) に答えなさい. なお, 解答はいずれも設問 (3) の下の空白部分に記入しなさい.

- (1) $B = AC$ を満たす 2 次正方行列 C を求めなさい.
- (2) A, B の行列式を $|A|, |B|$ で表す. $|B|$ を $|A|$ と γ を用いて表しなさい.
- (3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が互いに 1 次独立であるとする. このとき, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ も互いに 1 次独立であるための必要十分条件を γ を使って表しなさい.

(秋田大 2014) (m20140404)

0.19 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ について、行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(東北大 2008) (m20080505)

0.20 次の行列 B の行列式 $|B|$ を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 & -8 \\ 5 & -7 & -6 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(東北大 2018) (m20180505)

0.21 次の行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(東北大 2021) (m20210501)

0.22 行列 $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ の成分について

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

$$aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

が成り立っている. このとき

(1) M の行列式の値を求めよ.

$$(2) a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

$$ab + a'b' + a''b'' = ac + a'c' + a''c'' = bc + b'c' + b''c'' = 0$$

が成り立っていることを示せ.

ヒント: M と, M の転置行列との積を考えよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970608)

0.23 2行2列の行列 C と D を以下のように与える.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 C の特性方程式 $\det(C - xI) = 0$ を書き下し, その根を求めよ. ただし, $\det(C - xI)$ は行列 $C - xI$ の行列式を表し, I は2行2列の単位行列である. すなわち $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) D の n 乗 (D^n) を求め, そのトレース $\text{tr}(D^n)$ を計算せよ. ただし, $\text{tr}D$ とは行列 D の対角成分の和を表す記号である.

(3) C の n 乗 (C^n) のトレース $\text{tr}(C^n)$ の値を $n = 1, 2, 3$ の場合に求めよ.

この結果を (2) と比較し, 一般の n の場合のトレース $\text{tr}(C^n)$ の値を予想せよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970609)

0.24 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(お茶の水女子大 2003) (m20030611)

0.25 $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ を実数係数の x の 2 次多項式とし, 次の 4 次正方行列を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 1 & c & d & 0 \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めよ.
 (2) 2 つの x の 2 次方程式 $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ が共通の実数解 α をもつとき

$$A \begin{bmatrix} \alpha^3 \\ \alpha^2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = o$$

となることを示し, A の行列式 $|A|$ は 0 となることを示せ. ただしここで o は数ベクトル空間 \mathbb{R}^4 の原点を表すものとする.

- (3) $P(x) = (x-1)(x-2)$ とする. このとき $|A| = Q(1)Q(2)$ であることを示し, $\text{rank } A \leq 3$ ならば $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ は少なくとも一つの共通の実数解をもつことを示せ
 (4) $P(x) = 0$ が 2 つの実数解 $x = \alpha, \beta$ ($\alpha \neq \beta$) を持つとする. このとき $\text{rank } A = 2$ であれば, $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ は 2 つの共通の実数解をもつことを示せ.

(お茶の水女子大 2011) (m20110602)

0.26 微分可能な関数 $f_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, 3$) に対して

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}$$

とおく. このとき, $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f'_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

と表されることを示せ. ただし, $|\quad|$ は行列式を表す.

(お茶の水女子大 2011) (m20110607)

0.27 三角形 ABC の三つの角について, 以下を示せ.

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(お茶の水女子大 2013) (m20130610)

- 0.28** (1) n 次正則行列 A の逆行列 A^{-1} を A の行列式 $|A|$ 及び A の余因子行列 \tilde{A} を用いて表せ.
 (2) A を成分が全て整数である n 次正則行列とする. さらに, A の行列式は 1 であると仮定する. このとき, A の逆行列 A^{-1} の成分も全て整数となることを示せ.
 (3) 次の行列 B の行列式を求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & 3 & 6 & 7 \\ b_2 & c_2 & 0 & 4 & 6 \\ b_3 & c_3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

(お茶の水女子大 2014) (m20140602)

- 0.29** $m \times n$ 型実行列 $A(t) = (a_{ij}(t))$ の各成分 $a_{ij}(t)$ が t に関して微分可能な関数であるとき, $a_{ij}(t)$ の導関数 $a'_{ij}(t)$ を成分にもつ $m \times n$ 型行列を $A'(t)$ で表す.

- (1) 各成分が t に関して微分可能な関数である $m \times n$ 型, $n \times l$ 型実行列をそれぞれ $F(t) = (f_{ij}(t))$, $G(t) = (g_{jk}(t))$ で表す. このとき, 行列の積 $F(t)G(t)$ の各成分も t に関して微分可能な関数となり, $(FG)'(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t)$ が成り立つことを示せ.
 (2) $F(t) = (f_{ij}(t))$ は, 各成分が t に関して微分可能な関数である n 次実正方形行列とする. $F(t)$ の行列式 $|F(t)|$ は t に関して微分可能な関数となることを示せ. すべての t について $F(t) = (f_{ij}(t))$ は正則であるとき, $F(t)$ の逆行列 $F^{-1}(t)$ の各成分も微分可能な関数で, $(F^{-1})'(t) = -F^{-1}(t)F'(t)F^{-1}(t)$ が成り立つことを示せ.

(お茶の水女子大 2017) (m20170603)

- 0.30** n 次行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

を計算し, x の整式の形で表せ,

(お茶の水女子大 2019) (m20190605)

- 0.31** 次の行列の行列式を計算し, それが 0 となる x の値をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & 1 & x \\ \omega & 1 & 2 & x^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 4 & x^3 \\ 1 & \omega & 8 & x^4 \end{pmatrix}$$

ただし, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ である.

(お茶の水女子大 2020) (m20200603)

- 0.32** 行列 $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の各問いに答えよ.

- (1) 行列式 $\det(M)$ を求めよ.

(2) 行列 M は可逆か否かを述べ、可逆ならばその逆行列 M^{-1} を求めよ。

(お茶の水女子大 2020) (m20200616)

0.33 実数をとる変数 $x_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ を用いて、行列 X を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する。 X の行列式を $|X|$ で表し、 X の逆行列を X^{-1} で表す。 また、正の実数 s の自然対数を $\log s$ で表す。 以下の問いに答えよ。

(1) $|X|$ の x_{11} に関する偏導関数 $\frac{\partial |X|}{\partial x_{11}}$ を、 $x_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ のうちの必要なものを用いて表せ。

(2) X が $|X| > 0$ を満たすとき、 $y_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ を

$$y_{ij} = \frac{\partial(\log |X^{-1}|)}{\partial x_{ij}}$$

で定義する。 このとき、 y_{11} を、 $|X|$ と $x_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ のうちの必要なものを用いて表せ。

(3) (2) で定義した $y_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ を用いて、行列 Y を

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する。 このとき、 X^{-1} を用いて Y を表せ。

(東京大 2014) (m20140705)

0.34 n を 2 以上の自然数として、 n 次の正方行列 X_n を考える。 X_n の i 行 j 列の行列要素を $x_{i,j}$ とし、

$$x_{i,i} = a \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_{i,i+1} = b \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$x_{i+1,i} = c \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$x_{i,j} = 0 \quad (|i-j| \geq 2)$$

と表されるものとする。 ここで、 a, b, c は実数とし、 X_n の行列式を $|X_n|$ と表すものとする。 次の問いに答えよ。

(1) $|X_2|$ と $|X_3|$ の値を求めよ。

(2) $|X_4|$ の値を求めよ。

(3) $n \geq 4$ としたときの、 $|X_n|$ を $|X_k|$ ($k \leq n-1$ とする自然数) の中から適切なものを用いて表せ。

(4) $a = 5, b = 3, c = 2$ としたとき、 $|X_n|$ を求めよ。

(東京大 2017) (m20170705)

0.35 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j) \\ -1 & (|i - j| = 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. A の行列式を求めよ.

(東京工業大 1999) (m19990804)

0.36 a を実数とするとき, 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2002) (m20020805)

0.37 次のような n 次正方行列の行列式を Δ_n とする.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

このとき次の問いに答えよ.

- (1) $\Delta_{n+2} = 2\Delta_{n+1} - \Delta_n$ が成り立つことを示せ.
- (2) Δ_n の値を求めよ.

(東京工業大 2003) (m20030803)

0.38 行列 $B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ について

- (1) 行列式を求めよ.
- (2) 階数を求めよ.

(東京工業大 2005) (m20050804)

0.39 $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & p & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 3 & 4 & q \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. ただし, p, q は定数である.

- (1) C の行列式を求めよ.
- (2) D および CD の階数を求めよ. 必要に応じ p, q の値で場合わけして答えよ.

(東京工業大 2009) (m20090802)

0.40 実数 a, b, c, d に対し, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ とおく.

- (1) $\det B$ を $\det A$ で表せ.
- (2) $\text{rank} A = 0$ のとき $\text{rank} B$ を求めよ.
- (3) $\text{rank} A = 1$ のとき $\text{rank} B$ を求めよ.
- (4) $\text{rank} A = 2$ のとき $\text{rank} B$ を求めよ.

(東京工業大 2011) (m20110802)

0.41 n を自然数とする. 次の n 次正方行列の行列式の値 D_n を求めよ.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(東京工業大 2022) (m20220803)

0.42 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

(東京農工大 1996) (m19960907)

0.43 次の行列を A とする. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 6 & -8 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

(1) A^2 を求めなさい.

(2) E を 3 次単位行列とするととき, t の方程式 $|tE - A^2| = 0$ の解をすべて求めなさい.

(東京農工大 2007) (m20070904)

0.44 λ を実数とし $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 3 次の数ベクトルとする. 次の各問いに答えなさい.

(1) \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列とする行列を A とするとき, 行列式 $|A| = 0$ を満たす λ の値を求めなさい.

(2) λ は (1) で求めた値とする. このとき \mathbf{c} を \mathbf{a} と \mathbf{b} の一次結合で表しなさい.

(東京農工大 2010) (m20100901)

0.45 a は実数とする. 次の行列を A とし, 3 次単位行列を E とする.

$$\begin{pmatrix} -10a - 11 & 13a - 23 & -30a - 30 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4a + 4 & -7a + 17 & 12a + 11 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|E - A|$ を展開して a の式で表しなさい.

(2) t の方程式 $|tE - A| = 0$ の解がすべて負の実数となるような a の範囲を求めなさい.

(東京農工大 2011) (m20110904)

0.46 次の 3 次正方行列 A に対して, その行列式 $|A|$ および, その逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(電気通信大 2001) (m20011006)

- 0.47 A は 3 次正方行列で, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすとする. このとき, 行列 A および行列式 $|A|$ を求めよ.

(電気通信大 2005) (m20051001)

- 0.48 次の 4 次正方行列 A, B に対して $A, B, A^{-1}B$ の行列式を求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2a+b & 2c+d & 0 & b \\ a+b & c+d & -a & b \\ -a-b & -c-d & 3a & b \\ -2a+b & -2c+d & a & b \end{bmatrix}$$

(電気通信大 2007) (m20071001)

- 0.49 (1) 以下の行列 A の行列式を求めよ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & y & 3 & 3 \\ x & y & z & 4 \end{bmatrix}$

- (2) 以下の行列 B の B^n を求めよ. $B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 但し, $n = 1, 2, 3, \dots$, とする.

(横浜国立大 2006) (m20061102)

- 0.50 以下の $n \times n$ 行列 J_n を考える.

$$J_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

例えば,

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

である, J_n の行列式を a_n とおくととき, 次の問いに答えよ.

- (1) a_2 を求めよ.
- (2) a_3 を求めよ.
- (3) a_4 を求めよ.
- (4) a_n を求めよ. 但し, $n = 2, 3, 4, \dots$

(横浜国立大 2011) (m20111101)

- 0.51 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列のランクを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2016) (m20161104)

0.52 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(千葉大 1994) (m19941203)

0.53 次の行列 A の行列式の値を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2y & x+y+3z \\ 2x & x+3y+z & 2z \\ 3x+y+z & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

(千葉大 1995) (m19951204)

0.54 次の行列 A について答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式を, A の成分を用いて表しなさい.
- (2) 行列 A の成分を用いて, 原点を始点とする 3 つの位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ を定義する. ここに, T は行列の転置を示す. これらのベクトルを用いて, $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ が (1) で表した行列式に等しくなることを示しなさい. ここで, \bullet は内積, \times は外積を意味する.
- (3) 行列式の絶対値が, これら 3 つのベクトルを 3 辺とする平行 6 面体の体積と等しいことを示しなさい.

(千葉大 2003) (m20031205)

0.55 ω は 1 の立方根で $\omega \neq 1$ であるとする.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \pm 3\sqrt{3}i \quad \text{を証明せよ.}$$

(筑波大 1998) (m19981303)

0.56 次の行列式を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2000) (m20001307)

0.57 次の行列式の値を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(筑波大 2001) (m20011309)

0.58 3次元ユークリッド空間の3つのベクトル:

$$\mathbf{a} = (1, 2, -1) \quad \mathbf{b} = (2, 3, 5) \quad \mathbf{c} = (-1, 0, 2)$$

によって張られる平行六面体の体積を求めなさい.

(筑波大 2012) (m20121316)

0.59 区間 (a, b) 上の微分可能な関数 $a_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq 3$, を (i, j) -成分とする3次正方行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とする.

(1) 行列式 $|A(t)|$ の微分 $|A(t)|'$ に関する次の等式を示せ.

$$|A(t)|' = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

(2) $A(t)$ が正則であるとき, 上の等式の右辺の各項を行に関して余因子展開することにより,

$$|A(t)|' = \text{Tr}(A'(t)A(t)^{-1})|A(t)|$$

が成り立つことを示せ. ここで $A'(t) = (a'_{ij}(t))$ であり, Tr はトレースを表す.

(筑波大 2012) (m20121325)

0.60 次の実正方行列 A に対して, 以下の問いに答えよ. ただし, 途中の計算過程も示すこと.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ.

(2) $p_n = a^n + b^n + c^n + d^n$ とおくとき, 4×4 の行列 $B = [p_{i+j-2}]_{1 \leq i, j \leq 4}$ の行列式を計算せよ.

(筑波大 2013) (m20131314)

0.61 $n \times n$ 行列 A は各行に 1 と -1 である要素がひとつずつあり, 残りの要素は全て 0 であるとする. ただし, $n \geq 3$ とする.

(1) A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ と表す. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は線形従属であることを示せ.

(2) A の任意の 2×2 部分正方行列の行列式が取り得る値をすべて求めよ.

(筑波大 2014) (m20141301)

0.62 未知数 x, y を含む次の 3 つの行列に関して設問 (1)~(4) に答えなさい.

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad H(y) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

ただし, a, b, c はいずれも 0 でないものとする.

- (1) $G(x)$ と $H(y)$ の行列式 $|G(x)|$ と $|H(y)|$ をそれぞれ求めなさい.
- (2) $|G(x)| = |H(y)|$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.
- (3) $|G(x)|$ と $|H(y)|$ を使って $F(x, y)$ の行列式 $|F(x, y)|$ を表しなさい.
- (4) $|G(x)| \neq |H(y)|$ のとき, $|F(x, y)| = 0$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい.

(筑波大 2015) (m20151320)

0.63 $n \times n$ 行列 A を

$$\begin{bmatrix} b & \dots & \dots & b & a \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ a & b & \dots & \dots & b \end{bmatrix}$$

とおく. 但し, n は 2 以上の整数, a, b は実数で, $a \neq 0$ であるとする. 以下の問に答えよ.

- (1) 行列 A の行列式の値を a, b および n を用いて表せ.
- (2) 行列 A の行列式の値が 0 となるようなすべての b に対して, b を a と n を用いて表せ.
- (3) (2) で求めたそれぞれの b に対応する行列 A の階数を求めよ.

(筑波大 2021) (m20211309)

0.64 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) $\text{rank } A = 3$ となる a の実数値を求めなさい.
- (2) $a = 2$ のとき, A の行列式を求めなさい.
- (3) $a = 1$ のとき, A の逆行列を求めなさい.

(埼玉大 2001) (m20011407)

0.65 次の 4 つの行列 A, B, C, D を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A, B, AB の行列式を求めよ.

(2) 行列 $C + D$ の階数を求めよ.

(埼玉大 2001) (m20011408)

0.66 実数 a, b, c, d が

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0$$

を満たすための必要十分条件は $a + 2b + 3c + 4d = 0$ であることを示せ.

(埼玉大 2003) (m20031408)

0.67 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ.

- (1) 行列 A の行列式が 0 となるような実数 a の値を求めよ.
- (2) 行列 A が直交行列となるような実数 a の値を求めよ.

(埼玉大 2005) (m20051404)

0.68 (1) 変数 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2$ の間に, $x_1 = 3y_1 + y_2 + 2y_3$, $x_2 = -y_1 + 2y_3$, $y_1 = 3z_1 - 2z_2$, $y_2 = az_2$, $y_3 = z_1 + 4z_2$ の関係があるとき, x_1, x_2 を z_1, z_2 で表す式を求め, さらに, 任意の z_1, z_2 において, $x_1 = kx_2$ となるための定数 a および k を求めよ. ただし, $k \neq 0$ とする.

(2) 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

(埼玉大 2006) (m20061403)

0.69 行列式 $f(x)$ について考える. $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 5 & 10 \\ -1 & x+4 & 10 \\ -5 & 6 & x-6 \end{vmatrix}$

- (1) 行列式 $f(x)$ を求めよ.
- (2) 行列式 $f(x)$ が 0 となる時, x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071403)

0.70 (1) 行列 A の階数を求めよ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列 B の逆行列を求めよ. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 行列 C の行列式を求めよ. ただし, 解答は因数分解した形で表せ. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$

(埼玉大 2008) (m20081403)

0.71 次の行列の行列式の値が0となるような x を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 2 \\ -x & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2009) (m20091404)

0.72 次の行列式を求めよ. ただし, 解答は因数分解した形で表せ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

(埼玉大 2012) (m20121405)

0.73 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ がある. 以下の3問に答えよ.

- (1) A の行列式が $|A| = 2$ となるときの a の値を求めよ.
- (2) $|A| = 2$ かつ $|AB| = 6$ となるときの a と b の値を求めよ.
- (3) (2) の a, b のときの B の逆行列を求めよ.

(群馬大 2004) (m20041504)

0.74 以下の3つの問に答えよ.

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ.
- (2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ.
- (3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ.

(群馬大 2011) (m20111503)

0.75 以下の4つの問に答えよ.

- (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$ を満たす行列 A を求めよ.
- (2) (1) で求めた行列 A の行列式を求めよ.
- (3) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ.
- (4) (1) で求めた行列 A と行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$ について, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立するように, a と b を定めよ.

(群馬大 2012) (m20121504)

0.76 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ x & 1 & y \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$ について,

- (1) A の階数が1となる数の組 (x, y, z) をすべて求めよ.
- (2) $x = 1, y = 2$ のとき,

- (a) $\det A = 0$ となる z を求めよ.
 (b) $\det A \neq 0$ のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(茨城大 1999) (m19991707)

0.77 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次の各問に答えよ.

- (1) A が正則であるための a の条件を求めよ.
 (2) A が正則であるとき, A^{-1} の $(1, 2)$ 成分を求めよ.

(茨城大 2000) (m20001703)

0.78 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ (どのように計算したかも書くこと).

- (2) 次の四つのうちから一つを選び, それについて知っていることを説明せよ.
 (i) 基本行列 (ii) 置換 (iii) 行列式 (iv) 線形空間

(茨城大 2001) (m20011705)

0.79 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) A の行列式 $|A|$ を求めよ. (2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
 (3) $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ.

(茨城大 2006) (m20061701)

0.80 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ (a は実数) について, 次の各問に答えよ.

- (1) A の階数を求めよ.
 (2) A の行列式の値を求めよ.

(茨城大 2009) (m20091702)

0.81 x, y を実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 17 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, A の行列式を $|A|$ で表す.

x, y が条件 $|A| = 0$ を満たすとき, 点 (x, y) の描く図形を求めよ.

(茨城大 2012) (m20121705)

0.82 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.

(山梨大 2002) (m20021807)

0.83 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.
 (山梨大 2003) (m20031805)

0.84 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.
 (山梨大 2004) (m20041804)

0.85 下記に示す 4×4 行列 A が逆行列をもつための条件を導け.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(山梨大 2005) (m20051801)

0.86 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.
 (山梨大 2005) (m20051802)

0.87 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値および逆行列を求めなさい.
 (山梨大 2006) (m20061801)

0.88 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$ を考えるとき, A が逆行列をもつために必要かつ十分な a, b, c についての条件を求めなさい.
 (山梨大 2007) (m20071802)

0.89 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, A の行列式の値および逆行列を求めよ.
 (山梨大 2010) (m20101801)

0.90 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(山梨大 2012) (m20121803)

0.91 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- (2) 1直線上にない平面上の3点 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ の x 座標が相異なるとき, この3点を通る放物線 $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ は存在し, ただ1つであることを証明せよ.

(信州大 1998) (m19981904)

0.92 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a, b は実数とする.

- (1) 行列式 $|A|$ を求めよ.
- (2) A が逆行列をもつための a, b の条件を求めよ. また, A の逆行列を求めよ.

(信州大 2014) (m20141903)

0.93 次の行列式に関する等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

(信州大 2015) (m20151904)

0.94 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -a & -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a, b は実数とする.

- (1) A の行列式を計算せよ.
- (2) A が逆行列をもつための条件を a と b を用いて表せ.
- (3) a と b が (2) の条件を満たすとき, A の逆行列を求めよ.

(信州大 2017) (m20171903)

0.95 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の行列式の値を求めよ.
- (2) 6次正方行列 $\begin{pmatrix} 3A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(信州大 2018) (m20181903)

0.96 自然数 n に対し n 次正方行列 $A_n = (a_{ij})$ および $B_n = (b_{ij})$ を次のように定める.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j > 1) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- (1) A_4, B_4 の行列式 $|A_4|, |B_4|$ を求めよ.
- (2) A_n の行列式 $|A_n|$ を求めよ.
- (3) B_n の行列式 $|B_n|$ を求めよ.

(信州大 2019) (m20191910)

0.97 3以上の自然数 n に対して, n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を A_n とする. すなわち, A_n の (i, j) 成分は, $i = j$ のとき 5, $|i - j| = 1$ のとき 2, それ以外のとき 0 である. A_n の行列式の値を a_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a_3, a_4 を求めよ.
- (2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ.
- (3) a_n を求めよ.

(信州大 2020) (m20201903)

0.98 t は実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ について,

$A^2 B^3 A^{-1}$ の行列式の値が 128 であるとき, t の値を求めよ.

(信州大 2022) (m20221904)

0.99 3つの行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のうち, 正則な行列の行列式の値と逆行列を求めよ.

(信州大 2023) (m20231904)

0.100 n を 2 以上の自然数として $n \times n$ 行列 $A_n = (a_{ij})$ を次で定める.

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n) \\ a_{i, i+1} &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ a_{i+1, i} &= -1 & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ a_{ij} &= 0 & (|i - j| \geq 2) \end{aligned}$$

たとえば

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

- (1) $D_n = \det A_n$ とおく. A_n の第 n 列で余因子展開し, D_n に関する漸化式を求めよ.
- (2) D_5 を求めよ.

(新潟大 1998) (m19982005)

0.101 正方行列 X, Y に対して, $|XY| = |X||Y|$ が成り立つことは知っているものとする. ただし, $|*|$ は行列式を表す. A, B, C, D を n 次正方行列, I, O をそれぞれ n 次の単位行列, ゼロ行列とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 行列の積 $\begin{pmatrix} I & O \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ C & D \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} I & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D - CB|$ となることを示せ.

(3) A が正則 (逆行列をもつこと) であるとき, 次の各問いに答えよ.

(a) 次の式を満たす n 次正方行列 X を求めよ.

$$\begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

(b) さらに, $AC = CA$ ならば,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|$$

が成り立つことを示せ.

(新潟大 2000) (m20002003)

0.102 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 行列 A の行列式の定義は, 例えば,

$$|A| = \sum_{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \in S_n} \text{sgn} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

で与えられる. ここで, S_n は n 次の置換のすべての集合であり, sgn は置換の符号である. このとき次式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & B & & \\ * & & & \end{vmatrix} = a|B|$$

ただし, B は $(n-1)$ 次の正方行列とする.

(新潟大 2006) (m20062011)

0.103 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について行列式と逆行列を求めよ.

(新潟大 2009) (m20092004)

0.104 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(A)$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(新潟大 2010) (m20102002)

0.105 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

(新潟大 2010) (m20102006)

0.106 次の3次正方行列 A が直交行列であるとき, $\det A = |A| = 1$ または -1 であることを示せ.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

(新潟大 2010) (m20102015)

0.107 次の行列式を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

(新潟大 2012) (m20122013)

0.108 xyz -空間において, 3点 $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$, $P_3(a_3, b_3, c_3)$ は, 同一直線上にないとする. 多項式 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}$$

によって定める. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) $f(x, y, z)$ の定数項を求めよ.
- (2) $i = 1, 2, 3$ に対して, $f(a_i, b_i, c_i) = 0$ が成り立つことを説明せよ.
- (3) $f(x, y, z) = 0$ は, 3点 P_1, P_2, P_3 を通る平面の方程式であることを示せ.

(新潟大 2015) (m20152021)

0.109 行列式に関する, 次の各問いに答えよ.

(1) $\begin{vmatrix} 103 & 103 & 101 \\ 98 & 100 & 101 \\ 99 & 97 & 98 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & a & b^2 & 1 \\ 1 & a^2 & b^3 & c \\ 1 & a^3 & b^4 & c^2 \\ 1 & a^4 & b^5 & c^3 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(3) 方程式 $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & a \\ x & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & x \\ a & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ を解け. ただし, a は実定数とする.

(新潟大 2016) (m20162012)

0.110 以下の行列 A の行列式の値を求め, A が正則になる実数 a を全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.111 $z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}$ とするとき, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる x, y を求めよ.

(長岡技科大 1991) (m19912107)

0.112 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 行列 $xE - A$ の行列式 $|xE - A|$ を求めよ. (x の整式で表せ).

(長岡技科大 1992) (m19922108)

0.113 $z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}$ とするとき, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる x, y を求めよ.

(長岡技科大 1996) (m19962105)

0.114 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 AB を計算せよ.
- (2) 行列式 $|A|$ を求めよ.
- (3) $AX = E$ となる行列 X を求めよ.

(長岡技科大 2000) (m20002104)

0.115 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.
- (2) 実数 x, y, s, t に対して,

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

が成り立つとき, s, t を x, y で表しなさい.

- (3) 前問で得られた式を $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す行列 B を求めなさい.

(長岡技科大 2012) (m20122103)

0.116 a, b を実数とし, 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{pmatrix}$ を考える.

$\text{rank } A$ は A の階数を表す. 下の問いに答えなさい.

- (1) 行列式 $|A|$ の値を a, b を用いて表しなさい.

(2) 行列 A が正則になる条件を a, b を用いて表しなさい.

(3) $\text{rank } A = 1$ となるとき, a, b を求めなさい.

(長岡技科大 2019) (m20192101)

0.117 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, 次に答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を, 第2行に関して(余因子)展開することにより求めよ.

(2) A は正則か. 正則ならば, その逆行列 A^{-1} を求めよ.

(金沢大 1999) (m19992207)

0.118 t を実数とし, $A = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) A の行列式 $\det A$ の値を求めよ.

(2) A の階数を求めよ.

(金沢大 2005) (m20052204)

0.119 $A = \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ b & b+c & c \\ a & c & a+c \end{pmatrix}$ とする. 次に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & a & c \end{pmatrix} B$ となる行列 B を一つ見つけよ.

(2) A の行列式 $\det A$ を求め, A の逆行列が存在する為の必要十分条件を a, b, c の条件として答えよ.

(金沢大 2008) (m20082204)

0.120 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) $\det A = 0$ のとき, 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解け.

(3) $\det A \neq 0$ のとき, 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(金沢大 2009) (m20092201)

0.121 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ とする. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ に対して, 次を示せ.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$$

が0でないならば, \mathbf{a}, \mathbf{b} は1次独立である.

(2) 上の行列式が0ならば, \mathbf{a}, \mathbf{b} は1次従属である.

0.122 (1) 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(2) 次の n 次正方行列 (対角成分は 0, 対角成分以外は 1) の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

(金沢大 2016) (m20162233)

0.123 α を実数とする. 2 以上の自然数 n に対して, n 次正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

により定める. ここで, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ である.

また, $a_n = \det(A_n)$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3 を求めよ.
- (2) a_n を求めよ.
- (3) $\alpha \geq 0$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(金沢大 2021) (m20212204)

0.124 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A^2, A^3, A^4 を求めよ.
- (3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(富山大 2001) (m20012305)

0.125 次の各行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \\ 8 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 5 & -7 & 8 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

0.126 次の各問いに答えよ。ただし、 \mathbf{A} , \mathbf{B} は 2 行 2 列の正則な実数行列、 \mathbf{I} , \mathbf{O} はそれぞれ 2 行 2 列の単位行列と零行列とする。

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{vmatrix}$ と $\begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix}$ をそれぞれ求めよ。

(2) 次の等式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

(3) 次の分割行列 (ブロック行列) の積を計算せよ。なお計算結果は、 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{I} , \mathbf{O} のうち必要なものを小行列とする一つの分割行列として示すこと。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} - \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

(4) 次の等式が成立することを (1),(2),(3) の結果を利用して示せ。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B} - \mathbf{A}^{-1}|$$

(富山大 2018) (m20182306)

0.127 以下の行列式を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

(福井大 2001) (m20012417)

0.128 次の行列式の値を、因数分解した形で求めなさい。

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

(福井大 2004) (m20042416)

0.129 次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

(福井大 2006) (m20062409)

0.130 (1) 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

(2) α を実数とする。このとき、行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(a) A の行列式を計算せよ。

(b) A の階数を求めよ。

- (3) 三つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が線形従属 (一次従属) となるような x の値を求めよ.

(福井大 2008) (m20082409)

0.131 (1) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ を証明せよ.

(2) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 11 \\ 12 & 11 & 3 \end{vmatrix}$ を求めよ.

(福井大 2011) (m20112409)

- 0.132** 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

- (1) $a = 1, b = 2, c = 3$ のとき, A の行列式の値を求めよ.
 (2) a, b, c が相異なる実数のとき, A が正則であることを示せ.

(福井大 2013) (m20132403)

- 0.133** 行列 A, B, C に関して, 行列式を計算しなさい. また, 逆行列を, それぞれ求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2015) (m20152423)

- 0.134** 次の行列について, 以下の問いに答えよ.

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列式の値を求めよ. (2) 余因子を求めよ. (3) 逆行列を求めよ

(福井大 2016) (m20162407)

0.135 (1) $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+c & a \\ a & a & a+d \end{pmatrix}$ に対して, $|A| = abcd \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$ となることを示せ. ただし, $abcd \neq 0$ とする.

- (2) 行列 $A_n = (a_{ij})$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, n$ は 3 以上の整数) を,

$$a_{ij} = a_0 + a_i \delta_{ij}, \quad a_i : \text{実数} (1 \leq i \leq n)$$

で定義するとき,

$$|A_n| = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right)$$

となることを示せ. ただし, $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n \neq 0$ である. また, δ_{ij} は, $i = j$ のときに 1, $i \neq j$ のときに 0 をとるものとする.

(福井大 2016) (m20162409)

0.136 以下の行列の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^3$$

(福井大 2020) (m20202406)

0.137 (1) 以下のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の一次独立, 1 次従属を判定せよ. ただし, x は実数とする.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) n を 2 以上の整数, α を 0 でない実数とする. 次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち } a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j = n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i=j = n \text{ のとき} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

(a) A の逆行列を求めよ.

(b) A の行列式を計算せよ.

(3) 次の行列の階数を求めよ. ただし, z は実数とする.

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020) (m20202415)

0.138 以下の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(福井大 2022) (m20222419)

0.139 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

(静岡大 2008) (m20082509)

0.140 空間のベクトル $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, -2)$, $\vec{c} = (-1, 2, -2)$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を求めよ.
- (2) \vec{a} と \vec{b} とともに直交する長さ 1 のベクトルを求めよ.
- (3) \vec{a} , \vec{b} を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.
- (4) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(静岡大 2012) (m20122505)

0.141 行列 X_2, X_3, X_4 を各々

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) X_2, X_3, X_4 の行列式の値を求めなさい.
- (2) X_n (n : 自然数) を対角成分が 0 で, ほかの成分はすべて 1 である n 行 n 列の行列とすると, X_5 の行列式の値は 4 になるという. このとき, (1) の結果も利用して X_n の行列式の値を推測し, それが正しいことを示しなさい.

(静岡大 2013) (m20132511)

0.142 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき, A の逆行列 A^{-1} と行列式 $\det A$ を求めよ.

(岐阜大 2005) (m20052604)

0.143 3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} x-a & 2x & 2x \\ 2a & a-x & 2a \\ 0 & 0 & -a-x \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) この行列の行列式 $|A|$ を求めよ.
- (2) この行列式の値がゼロとなる, すなわち $|A| = 0$ を満たす, x を求めよ.

(岐阜大 2006) (m20062601)

0.144 n 次正方行列 A が $A^3 = O$ をみたしているとする. ただし, O は成分がすべて 0 の行列である.

- (1) $|A| = 0$ であることを示せ. ただし, $|A|$ は A の行列式である.
- (2) $n = 2$ とする. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくとき, $A^2 - (a+d)A = O$ であることを示せ.
- (3) $n = 2$ ならば $A^2 = O$ であることを示せ.

(岐阜大 2007) (m20072603)

0.145 (1) 行列 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $\begin{bmatrix} a-5 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & a-1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & a & 1 \\ -3 & 1 & 2 & a-1 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

(3) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092610)

0.146 行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(岐阜大 2009) (m20092621)

0.147 次の行列式 D の値を求めよ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

(岐阜大 2012) (m20122603)

0.148 次の行列式 D の値を求めよ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

(岐阜大 2017) (m20172604)

0.149 次の行列式 D の値を求めよ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(岐阜大 2022) (m20222603)

0.150 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

(n 次の行列式, 対角成分は a でその他の成分は b である)

(豊橋技科大 2014) (m20142704)

0.151 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

(豊橋技科大 2016) (m20162704)

0.152 以下の条件※で定義される n 次正方行列 C_n について次の問いに答えよ。ただし、 n は正の整数とし、 C_n の i 行 j 列の成分を c_{ij} とする。

条件※ i と j の少なくとも一方が 1 ならば $c_{ij} = (-1)^{i+j+1}$

その他の場合には $c_{ij} = 0$

- (1) C_1 および C_3 の行列式をそれぞれ求めよ。
- (2) C_3^2 を求めよ。

(豊橋技科大 2017) (m20172703)

0.153 次の行列 A, B に関して、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

- (1) A の行列式の値を求めよ。
- (2) A の逆行列を求めよ。
- (3) BA を求めよ。
- (4) $ABABA^2$ を求めよ。

(豊橋技科大 2020) (m20202701)

0.154 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & x & 1 & 0 \\ c & 0 & x & 1 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(名古屋大 2000) (m20002804)

0.155 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

(名古屋工業大 1998) (m19982906)

0.156 実数 a, b, c, d, e, f を用いて表される次の 4 次正方行列を考える。

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) この行列の行列式を求めよ。

(2) $be = af + cd$ の時, この行列式の値を可能な限り簡単にせよ.

(名古屋工業大 2005) (m20052902)

0.157 次の行列式の値が 0 となる a の値を全て求めよ.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

(名古屋工業大 2007) (m20072903)

0.158 次の行列式 D を因数分解せよ.

$$D = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 2ab & 0 \\ 0 & c^2 + d^2 & 0 & 2cd \\ 2ab & 0 & a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 2cd & 0 & c^2 + d^2 \end{vmatrix}$$

(名古屋工業大 2009) (m20092901)

0.159 次の 4 次行列 A , 4 次単位行列 E , およびパラメータ t に対して, 行列式 $|tE - A|$ を t について因数分解しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010) (m20102901)

0.160 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列が逆行列をもつときの x の条件を求めよ. また, そのときの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2012) (m20122901)

0.161 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(名古屋工業大 2015) (m20152906)

0.162 行列

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} の行列式を求めよ.

(名古屋工業大 2021) (m20212904)

0.163 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 a は定数とする。

- (1) 行列 A が逆行列を持たないような a の値をすべて求めよ。
- (2) 行列式 $|AB|$ を計算せよ。

(名古屋工業大 2022) (m20222905)

0.164 次の行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2003) (m20033111)

0.165 (1) 次の行列の行列式を $\det A$ とする。

$$A = \begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

ここで、 $a, b, c, d, e, f, l, m, n$ は定数として、方程式 $\det A = 0$ が 3次元空間 (xyz 空間) 上の平面の式を与えることを示せ。また、この平面の法線ベクトルを求めよ。

- (2) この平面に直線 $\frac{x-d}{l} = \frac{y-e}{m} = \frac{z-f}{n}$ が含まれることを示せ。

(三重大 2003) (m20033112)

0.166 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

- (1) 行列式 $|A|$ を計算せよ。
- (2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(三重大 2005) (m20053104)

0.167 次の行列のランク (階数) を求めよ。また、正則な場合は逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(三重大 2005) (m20053117)

0.168 次の行列式を因数分解せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(三重大 2006) (m20063103)

0.169 行列 $A = \begin{pmatrix} m & m+5 \\ 2-m & -m \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えなさい。ただし、 m は実数とする。

(1) A が逆行列を持たないとき, A^2 を求めなさい.

(2) $A^{-1} = A$ となるような m の値を求めなさい.

(三重大 2006) (m20063107)

0.170 (1) 次の等式を証明しなさい.

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$$

(2) (1) を利用して, 次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(三重大 2010) (m20103103)

0.171 次の行列 A の行列式 $|A|$ 及び逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(三重大 2010) (m20103110)

0.172 次の行列の積を求め, その行列式の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(三重大 2022) (m20223111)

0.173 3次行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -9 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & 8 & -12 \end{pmatrix}$ と三つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ に対して次の間に答えよ.

(1) \mathbf{a}, \mathbf{b} は 1 次独立か. (2) \mathbf{a}, \mathbf{c} は 1 次独立か. (3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 1 次独立か.

(4) A の行列式の値を求めよ. (5) A は逆行列をもつか.

(奈良女子大 2005) (m20053201)

0.174 3次行列と $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と 4 つのベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ に対して次の間に答えよ.}$$

(1) A の行列式の値を求めよ. (2) A の逆行列を求めよ.

(1) \mathbf{d} を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の一次結合として $\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ (x, y, z は実数) の形で表せ.

(奈良女子大 2006) (m20063201)

0.175 次の行列の行列式を求めよ。また、この行列の逆行列が存在するか否か判定せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2007) (m20073204)

0.176 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として、 $\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$ を求めよ。

(2) 行列式 A を求めよ。

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ。

(奈良女子大 2017) (m20173208)

0.177 行列 A が次のように定義されているとき、以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) i 列目の x_i と j 列目の x_j が等しい場合、階数は n より 1 以上小さいことを示せ。

(2) A の行列式は $(x_i - x_j)$ で割りきれられることを示せ。 ($i \neq j$)

(3) 列の値がすべて同じ値である列数が m であるとすると、階数は $(n - m)$ であることを示せ。

(京都大 1999) (m19993303)

0.178 次の行列式の値を求めよ。但し、その導出過程も書くこと。

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

(京都大 2000) (m20003301)

0.179 行列 A に対して、その行列式の値を $|A|$ 、その絶対値を $abs|A|$ と表記する。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 点 $P(x_1, y_1)$ と原点を通る直線の方程式を行列式を用いて表現せよ。

- (3) 平面上の3点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の面積 S は以下のように表現できることを示せ.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

(京都大 2004) (m20043303)

- 0.180** 3次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め、その x 軸, y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とする. 2つのベクトル $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$ および $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$ について、以下の(1)~(4)に答えよ. ただし, \mathbf{u}, \mathbf{v} は零ベクトルではないものとする.

- (1) \mathbf{u} と \mathbf{v} のなす角 θ の余弦 $\cos \theta$ を $u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z$ を用いて表せ.
 (2) \mathbf{u} と \mathbf{v} を2辺とする平行四辺形の面積 S を $u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z$ を用いて表せ. ただし, 平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする.
 (3) \mathbf{u} と \mathbf{v} に対して, ベクトル \mathbf{w} を, 行列式を形式的に用いて

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する. ベクトル \mathbf{w} は, \mathbf{u} および \mathbf{v} に直交することを示せ.

- (4) ベクトル \mathbf{w} の長さは(2)の面積 S に等しいことを示せ.

(京都大 2009) (m20093304)

- 0.181** 次の行列の行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \text{ 次の正方行列, ただし } n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

(京都大 2019) (m20193303)

0.182 行列式 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 1998) (m19983405)

0.183 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 15 & 6 \\ 4 & 10 & 20 & 4 \end{pmatrix}$ の階数 (rank) を求めよ.

(京都工芸繊維大 1999) (m19993405)

0.184 行列式を含む方程式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ を解け.

(京都工芸繊維大 2000) (m20003410)

0.185 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式の値が 1 となるように a の値を定めよ.

また, そのように a の値を定めたとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(京都工芸繊維大 2004) (m20043404)

0.186 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2004) (m20043406)

0.187 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ p & q & r \end{pmatrix}$ が直交行列となり, その行列式が 1 となるように p, q, r を定めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053404)

0.188 a, b を異なる定数とするとき, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & -b & a \\ b & a & x & -a \\ a & a & b & x \end{pmatrix}$$

が逆行列を持たないような x の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053406)

0.189 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & -y \\ 1 & -z & 0 & x \\ 1 & y & -x & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063401)

0.190 実数 x が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする. 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin x & \cos x & \tan x \\ -\sin x & 0 & 0 & \cos x \\ -\cos x & 0 & 0 & \sin x \\ -\tan x & -\cos x & -\sin x & 0 \end{vmatrix}$$

の値が $\frac{1}{4}$ となるような x をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2009) (m20093401)

0.191 a を実数とする. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(京都工芸繊維大 2018) (m20183401)

0.192 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 & 4 \\ 5 & -6 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ であるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 A の階数 (rank) を求めよ.

(大阪府立大 2003) (m20033602)

0.193 (1) 次の方程式を解け. なお, $|\cdot|$ は行列式を表す.

$$\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & -2 & x+3 \\ 3 & x+4 & x-4 & x+5 \\ 0 & x+1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & x-8 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 以下の行列 A が逆行列を持つ条件を示せ. また, 行列 A の逆行列を求めよ. なお, a は実数と

する. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(大阪府立大 2008) (m20083601)

0.194 次の問いに答えよ.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(2) $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列とし,

$$a_{ij} = |i - j| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

とする. このとき, A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(大阪府立大 2011) (m20113605)

0.195 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(神戸大 1994) (m19943803)

0.196 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を余因子を使って求めよ.

(神戸大 1994) (m19943804)

0.197 次の各行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & -1 & 0 \\ b & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1997) (m19973810)

0.198 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(神戸大 1998) (m19983806)

0.199 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & -3 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & 6 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1998) (m19983807)

0.200 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1999) (m19993806)

0.201 以下の問に答えよ.

(1) n を自然数とし, $0 < i < n$ とするとき, ${}_n C_i = {}_{n-1} C_i + {}_{n-1} C_{i-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0C_0 & 1C_1 & 2C_2 & 3C_3 & 4C_4 & 5C_5 & 6C_6 \\ 1C_0 & 2C_1 & 3C_2 & 4C_3 & 5C_4 & 6C_5 & 7C_6 \\ 2C_0 & 3C_1 & 4C_2 & 5C_3 & 6C_4 & 7C_5 & 8C_6 \\ 3C_0 & 4C_1 & 5C_2 & 6C_3 & 7C_4 & 8C_5 & 9C_6 \\ 4C_0 & 5C_1 & 6C_2 & 7C_3 & 8C_4 & 9C_5 & 10C_6 \\ 5C_0 & 6C_1 & 7C_2 & 8C_3 & 9C_4 & 10C_5 & 11C_6 \\ 6C_0 & 7C_1 & 8C_2 & 9C_3 & 10C_4 & 11C_5 & 12C_6 \end{vmatrix}$$

(神戸大 1999) (m19993807)

0.202 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$ のうち, a_{24}, a_{42}, a_{63} を含む項の合計を求めよ.

(神戸大 1999) (m19993808)

0.203 次の等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

(神戸大 2001) (m20013809)

0.204 n を 2 以上の自然数とするとき, 次の行列の行列式を求めよ. ただし, a_1, a_2, \dots, a_n は実数とする.

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2002) (m20023805)

0.205 a_1, \dots, a_n を実数とするとき, 次の $n \times n$ 行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 + a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2003) (m20033809)

0.206 次の n 次正方行列の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

(神戸大 2004) (m20043807)

0.207 次の各問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 \tilde{A} を求めよ.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} x & 1 & a & b \\ y^2 & y & 1 & c \\ yz^2 & z^2 & z & 1 \\ yzt & zt & t & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det(B)$ を求めよ.

(神戸大 2004) (m20043808)

0.208 次の行列式を一次式の積に分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & 1 \\ b^2 & (c+a)^2 & 1 \\ c^2 & (a+b)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

(神戸大 2007) (m20073802)

0.209 (1) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を因数分解せよ.

(2) n 次の正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たしているとする. ただし, tA は A の転置行列である. このとき, n が奇数ならば, A の行列式は 0 であることを示せ.

(神戸大 2008) (m20083806)

0.210 (1) 行列式 $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 次を満たす \mathbb{R}^4 のベクトル \mathbf{v} を 1 つあげよ.

$$\mathbf{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ であり, } \mathbf{v} \text{ は 3 つのベクトル } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ のいずれとも直交する.}$$

(神戸大 2009) (m20093805)

0.211 3 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $\det(A)$ を求めよ.

(2) A の余因子行列を求めよ.

(3) A^{-1} を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093813)

0.212 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(2) 等式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - bc + cd)^2$ を示せ.

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{bmatrix}$ について,

${}^tA = -A$ を示し、これを用いて $\det(A) = 0$ を証明せよ.

(神戸大 2010) (m20103806)

0.213 次の (a), (b) の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.04 & -0.008 \\ -0.2 & 1.04 & 0.008 & 0.0016 \\ -0.04 & 0.008 & 1.0016 & 0.00032 \\ -0.008 & 0.0016 & 0.00032 & 0 \end{vmatrix}$$

(神戸大 2012) (m20123801)

0.214 正の整数 n と実数 c, y_1, y_2, \dots, y_n に対し, $D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n)$ を

$$D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 y_1 + c & y_2 y_1 & \dots & y_n y_1 \\ y_1 y_2 & y_2 y_2 + c & \dots & y_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1 y_n & y_2 y_n & \dots & y_n y_n + c \end{bmatrix}$$

で定義し, また $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n)$ を

$$d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 y_1 & \dots & y_n y_1 \\ y_2 & y_2 y_2 + c & \dots & y_n y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_2 y_n & \dots & y_n y_n + c \end{bmatrix}$$

で定義する. ただし, $\det A$ は行列 A の行列式を表す. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $n \geq 2$ のとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = cD_{n-1}(c, y_2, \dots, y_n) + y_1 d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

(2) $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = c^{n-1} y_1$ であることを示せ.

(3) n についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ. (ただし $0^0 = 1$ とする.)

$$D_n(c, y_1, y_2, \dots, y_n) = c^n + c^{n-1} \sum_{k=1}^n y_k^2$$

(神戸大 2014) (m20143806)

0.215 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $A = B {}^tB$ をみだし, すべての対角成分が正の下三角行列 B を求めよ. ただし, tB は B の転置行列とする.

(2) A の行列式の値を求めよ.

(3) B の逆行列を求めよ.

(4) A^{-1} の第 4 行を求めよ.

(神戸大 2018) (m20183802)

0.216 $A = (a_{ij})$ を 3 次正方行列とする. A は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を 1 つずつ成分としてもち,

- 各 $i = 1, 2, 3$ について $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \lambda$
- 各 $j = 1, 2, 3$ について $a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = \lambda$
- $a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31} = \lambda$

を満たす自然数 λ が存在すると仮定する. このとき, A は 3 次の魔方陣と呼ばれる. 以下の各問に答えよ.

- (1) $\lambda = 15$ を示せ.
- (2) $a_{22} = 5$ を示せ.
- (3) $1 + x + y = 15$, $1 < x < y \leq 9$ となる自然数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ.
- (4) $\det A$ の絶対値を求めよ. またこの値の一意性を示せ.

(神戸大 2021) (m20213808)

0.217 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2005) (m20053912)

0.218 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2006) (m20063910)

0.219 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2006) (m20063911)

0.220 以下の行列式 u, v をそれぞれ計算せよ.

$$(1) u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (2) v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2007) (m20073908)

0.221 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2007) (m20073910)

0.222 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

(鳥取大 2007) (m20073918)

0.223 行列と行列式に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 次の行列式の値を計算せよ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) (1) の行列 A の逆行列を求めよ.

(鳥取大 2012) (m20123902)

0.224 点 O を原点とする直交座標系 (x, y, z) において, 位置ベクトル, $\vec{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{OC} = 2\vec{j} + \vec{k}$ が与えられている. 以下の問いに答えなさい. なお, \vec{i} , \vec{j} および \vec{k} はそれぞれ x , y および z 方向における単位ベクトルを表す.

(1) 外積 $\vec{OA} \times \vec{OB}$ を計算せよ.

(2) ベクトル \vec{OA} , \vec{OB} および \vec{OC} を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(鳥取大 2012) (m20123903)

0.225 1 から 9 までの数字を並べて 3 次正方行列 A を作る. ただし, すべての数字を一度ずつ使うこととする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式が 0 であるようなものと, 0 でないようなものの例を一つずつ作れ.

(2) 階数が 1 であるような行列 A は作れないことを証明せよ.

(岡山大 2010) (m20104003)

0.226 初期値 $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$ をフィボナッチ数列という. 例えば, $F_3 = F_2 + F_1 = 2$, $F_4 = F_3 + F_2 = 3$ である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) F_6 を求めよ. また, 行列式

$$\det \begin{pmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ.

(2) $n \geq 1$ に対して, 2 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき, $\det A_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(3) $n \geq 1$ に対して, 3 次の正方行列 B_n を

$$B_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき, $\det B_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(4) 上の問い (3) で定義した B_n の余因子行列を \tilde{B}_n とかくとき, $n \geq 1$ に対して, $\det \tilde{B}_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(岡山大 2017) (m20174003)

0.227 実数 a に対して行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式 $\det A$ を求めよ.
 (2) $\det A = 0$ となるような非負の実数 a を求め, その時の A の階数を計算せよ.
 (3) 前問における a に対して, $A\mathbf{v} \neq 0$ かつ $A^2\mathbf{v} = 0$ となるようなベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ.

(広島大 2008) (m20084103)

0.228 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ を計算せよ.

(広島大 2018) (m20184106)

0.229 A, B を n 次の正方行列とする. このとき, 以下の問いに答えよ. なお, $|X|$ は正方行列 X の行列式を表す.

- (1) AB が正則行列ならば, B も正則行列となることを示せ.
 (2) A が正則行列であるとき, 等式 $|B| = |A^{-1}BA|$ を示せ.

(広島市立大 2002) (m20024206)

0.230 2 次実正方行列 A, B, C, D

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

に対して, 4 次実正方行列 M, N を次で与える.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} B & A \\ C & D \end{pmatrix}$$

ここで, O は 2 次の零行列である.

実正方行列 X に対して行列式を $|X|$ で表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) $|M| = |A||C|$ であることを示せ.
 (2) $B = sA, D = tC$ (s, t は実数) のとき, $k = \frac{|N|}{|M|}$ を求めよ. ただし, $|M| \neq 0$ とする.

(広島市立大 2009) (m20094204)

0.231 (1) 次の行列式を展開して因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & y+z & yz \\ 1 & z+x & zx \\ 1 & x+y & xy \end{vmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を計算しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2001) (m20014315)

0.232 $f_i(x), g_i(x), h_i(x)$ を微分可能な関数とし,

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} \text{ とするとき,}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}$$

を示しなさい。ただし、 $f'_i(x)$, $g'_i(x)$, $h'_i(x)$ はそれぞれの関数の微分である。

(山口大 2002) (m20024304)

0.233 行列式 A の値を求めなさい。

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 8 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2003) (m20034309)

0.234 行列式の計算において、行列式の1つの行（または列）の全ての要素に同一の数をかけて得られる行列式の値はもとの行列式の値にその数をかけたものと等しいことを行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ を例として使って説明しなさい。

(山口大 2004) (m20044309)

0.235 次の行列式の値を計算しなさい。

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 8 \\ -5 & 4 & -7 & 9 \\ 6 & 3 & -2 & 13 \end{vmatrix}$$

(山口大 2005) (m20054305)

0.236 次の行列式の値を求めなさい。

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(山口大 2009) (m20094306)

0.237 以下に示す行列 A について、行列式 $|A|$ の値を求めなさい。さらに逆行列 A^{-1} の $(1, 1)$ 成分を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(山口大 2015) (m20154302)

0.238 次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

(徳島大 1998) (m19984404)

0.239 次の問に答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 15 & 42 & 46 \\ 21 & 66 & 85 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ とする。 $A = BC$ となる3次正方行列 C を求めよ。また行列式 $|A|$ の値を求めよ。

(2) 次の方程式を解け. ここで左辺は行列式を表す.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1-x & x^2-2x & x^3 \\ 0 & x-2 & 1-x & x^2-2x \\ x^2 & 1-x & 1-2x & 1-x+x^3 \\ -x^2 & x-1 & 2x-x^2 & 2-x^3 \end{vmatrix} = 0$$

(徳島大 2005) (m20054401)

0.240 $0 \leq a \leq 1$ に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & 1 & -1 \\ 0 & 9a & 3 \\ \frac{3}{4}a & 1 & -a \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ. ここで, $\det(M)$ は
 正方行列 M の行列式を表す.

- (1) $\det(A)$ を求めよ.
- (2) $f(a) = \det(A)$ とする. $f(a)$ のグラフを図示せよ.
- (3) n を自然数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \det(A^n)$ を求めよ.

(徳島大 2011) (m20114401)

0.241 4 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算し, その結果を因数分解せよ.

(高知大 2005) (m20054502)

0.242 I_n を $n \times n$ 単位行列とする. また, $a \in \mathbf{R}^n$ を長さ 1 の n 次元行ベクトルとする. 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, 行列 $A(x)$ と関数 $f(x)$ を次のように定義する.

$$A(x) = I_n + x({}^t a a), \quad f(x) = \det A(x)$$

ただし, ${}^t a$ は a の転置ベクトルであり, $\det A(x)$ は $A(x)$ の行列式である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(0) = 1$ を示せ.
- (2) $aA(-1) = 0$ であり, ゆえに $f(-1) = 0$ となることを示せ.
- (3) $f(x)$ は x の多項式であり, その次数 m は $1 \leq m \leq n$ を満たすことを示せ.
- (4) 任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対して, $f(x)f(y) = f(x+y+xy)$ となることを示せ.
- (5) $f(x) = (1+x)^m$ を示せ.
- (6) $m = 1$, すなわち $f(x) = 1+x$ となることを示せ.

(高知大 2006) (m20064503)

0.243 $\det(A)$, $\text{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式, 階数を表す. 次の問いに答えよ.

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について, $\text{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ.

(3) A を n 次正方行列, I を n 次単位行列とし, $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく. λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき, $\text{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ.

(高知大 2008) (m20084503)

0.244 n は正の整数とする. A は n 次実正方行列で, $A^2 = O_n$ をみたすとする. また, $\alpha = \det(A + I_n)$, $\beta = \det(A - I_n)$ とおく. ただし, O_n と I_n はそれぞれ n 次の零行列と単位行列を表すものとし, $\det(M)$ は行列 M の行列式とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\left(\det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(2) $\left(\det\left(I_n - \frac{1}{2}A\right)\right)^2$ を α または β を用いて表せ.

(3) n が奇数のとき, $\alpha \geq \beta$ を示せ.

(高知大 2019) (m20194503)

0.245 行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の行列式を計算せよ.

(2) A の逆行列の成分がすべて整数となるような整数 k の値を求めよ.

(愛媛大 2000) (m20004605)

0.246 次の行列式を計算せよ. (2) は因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 2005) (m20054607)

0.247 (1) 4 次の行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & x \\ -2 & 0 & x & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ を $f(x)$ とおく. $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x) = 0$ の実数解を全て求めよ.

(愛媛大 2007) (m20074609)

0.248 a を実数とする. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} が存在するための必要十分条件を a を用いて表せ. また, a がその条件をみたすとき A^{-1} を求めよ.

(3) $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$ が成り立つとき, a の値を求めよ. ただし, $|A^{-1}|$ は A^{-1} の行列式を表す.

(愛媛大 2007) (m20074612)

0.249 a を実数とし、行列 A およびベクトル \mathbf{b} を $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で定める. さらに, $\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}$ を列ベクトルにもつ 3 次正方行列を B とする. すなわち $B = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b})$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}$ を求めよ. (2) B の行列式 $|B|$ を求めよ.
 (3) B の逆行列 B^{-1} が存在するための必要十分条件を, a を用いて表せ.

(愛媛大 2008) (m20084602)

0.250 次の行列を, 行の基本変形を使って上 3 角行列に変形せよ. また, これらの行列の階数 (ランク) と行列式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ただし, 上 3 角行列とは $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ という形の行列である.

(愛媛大 2008) (m20084605)

0.251 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

- (1) A^2 を計算せよ.
 (2) 次の行列式の値をゼロにする a, b, c をすべて求めよ.

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 2010) (m20104605)

0.252 行列 P, Q, R, S を次のように定める.

$$P = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

以下の問いに答えよ.

- (1) 次のうち, 計算可能なものについてその計算をせよ.
 (i) $S^2 - RQ$ (ii) tPRS (iii) $R{}^tQ + {}^t(Q{}^tR)$ (iv) $SP - 2P$
 (2) 行列 P, Q, R, S のうち, 正則行列であるものに対してその逆行列を求めよ.

- (3) x を実数とする. 行列 $T = S + \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ. また, T が正則でないとき, x の値を求めよ.

(愛媛大 2017) (m20174612)

0.253 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(愛媛大 2021) (m20214606)

0.254 つぶれていない四面体には4個の頂点がある. 各頂点の座標を (x_i, y_i, z_i) ($1 \leq i \leq 4$) とする. 四面体内 (表面を含む) の任意の点 P の座標を (x, y, z) で表すとき,

$$u(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (*)$$

で表せる関数 $u(x, y, z)$ を考える. ただし, α_i ($1 \leq i \leq 4$) は定数である. このとき次の各問いに答えよ.

- (1) 4個に頂点における関数値 u_i ($1 \leq i \leq 4$) を既知とするとき, α_i ($1 \leq i \leq 4$) を決定する連立1次方程式を求めよ.
- (2) 直前に求めた連立1次方程式で α_i ($1 \leq i \leq 4$) を求め, それを (*) 式に代入した結果を

$$u(x, y, z) = \sum L_i(x, y, z) u_i \quad (**)$$

と表す. ただし, \sum は $i = 1$ から 4 までの総和を表し, $L_i(x, y, z)$ は次式で与えられる.

$$L_i(x, y, z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z \quad (***)$$

- (a) $L_i(x, y, z)$ ($1 \leq i \leq 4$) の各頂点における関数値を求めよ.
- (b) $L_i(x, y, z)$ ($1 \leq i \leq 4$) の四面体の6個の辺の各中点における関数値を求めよ.
- (c) (***) 式の a_i, b_i, c_i, d_i を以下の5個の行列式 (A, B, C, D, E) を用いて表現せよ. その際, i が 1 から 4 まで動いたときの j, k, l のとる値を明示せよ.

$$A = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

(九州大 1999) (m19994705)

0.255 a, b, c を実数とし, 3×3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a+b+c & -a-c & a+b-c \\ -a-c & a+c & -a+c \\ a+b-c & -a+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

と定めるとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $abc \neq 0$ のとき $|A| \neq 0$ となることを示せ. ただし, $|A|$ は行列 A の行列式を表すものとする.
- (2) $a = b = c = 1$ のとき, 行列 A の逆行列を求めよ.

(九州大 2006) (m20064710)

0.256 $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) を 2×2 実行列とする. A^T で A の転置行列を表すとする. ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して内積を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ で定める.

- (1) 任意のベクトル \mathbf{x} に対して, $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ が成立する時, $A^T A = A A^T = E$ が成り立つことを示せ. ただし, E は単位行列とする.
- (2) (1) の行列 A の行列式は 1 もしくは -1 であることを示せ. さらに行列 A の固有値は絶対値が 1 であることを示せ.
- (3) (2) において A の行列式が -1 であるとき, ある実数 θ が存在して

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{と書けることを示せ.}$$

(九州大 2007) (m20074708)

0.257 実数 p に対して n 次正方行列 A_n を以下のように定める.

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ p & i = j = n \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし, $(A_n)_{i,j}$ は行列 A_n の (i, j) 成分を表す. また, $A_1 = p$ とする.

- (1) $p = \frac{2}{3}$ のとき A_3 の階数を求めよ.
- (2) $p = 1$ のとき A_3 の逆行列を求めよ.
- (3) A_n の行列式 $|A_n|$ を a_n とおく. 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ のみたす漸化式を導き, a_n , $n = 1, 2, \dots$, を求めよ.

(九州大 2007) (m20074709)

0.258 次の行列 A の行列式を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(九州大 2008) (m20084716)

0.259 4×4 実行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の行列式が 0 となる a の値を求めよ.
- (2) 行列 A の階数を求めよ.

(九州大 2009) (m20094707)

0.260 行列 V_2, V_3, V_4 を次のように定義する:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

- (1) V_2, V_3, V_4 の行列式を求めよ.
 (2) V_2, V_3, V_4 の逆行列が存在する条件を述べ, その条件下で逆行列を求めよ.

(九州大 2009) (m20094709)

0.261 3×3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, E を 3×3 単位行列とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) x についての多項式として, $|xE - A| = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ が成立するように, 定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を定めよ. ただし, $|xE - A|$ は行列 $xE - A$ の行列式を表す.
 (2) (1) で求めた定数 a_0, a_1, a_2 に対し, $a_0A^2 + a_1A + a_2E$ を求めよ.

(九州大 2011) (m20114703)

0.262 関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ により定める, ただし, $|\cdot|$ は行列式を表す. 以下の問いに

答えよ.

- (1) $f(x)$ は実数 β, a, b, c を用いて $f(x) = \beta(x-a)(x-b)(x-c)$ と表せる. β, a, b, c を求めよ. ただし, $a > b > c$ とする.
 (2) $g(x) = -x(2x-3)(x-3)$ とするとき, 方程式 $f(x) + g(x) = 0$ の解はすべて実数で, $-1 < x < 3$ の範囲に存在することを示せ.

(九州大 2012) (m20124708)

0.263 a を実数として, 4次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
 (2) A の行列式が 0 (ゼロ) となるような a の値をすべて求めよ.
 (3) 前問 (2) の解のうちの最小値を a_0 とおく. (前問 (2) の解がただ一つの場合は, それを a_0 とおく.) $a = a_0$ の場合に, A の階数 (rank) を求めよ.

(九州大 2015) (m20154706)

0.264 4次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
 (2) A の逆行列を求めよ.

(九州大 2017) (m20174701)

0.265 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ を xy 平面上の相異なる 3 点とする. また, $|M|$ は正方行列 M の行列式を表すこととする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 3 点 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ が同一直線上に存在するとき $|A| = 0$ となることを示せ.

- (2) 変数 x, y に対して, 正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ X_1^2 + Y_1^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2^2 + Y_2^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3^2 + Y_3^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. さらに, $\Delta_{i,j}$ を B の (i, j) -小行列式, つまり, B の第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる 3×3 行列の行列式とする. B の第 1 行に関する余因子展開により, 小行列式を用いて B の行列式を表せ.

- (3) 前問の行列 B が $|B| = 0$ を満たすとき, 変数 x, y が満たす方程式を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2021) (m20214706)

0.266 次の行列式を x について因数分解した形で求めよ. ただし, a, b, c は定数とする.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

(九州芸術工科大 2001) (m20014807)

0.267 行列式 $\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}$ を 2 乗して, $\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ を示せ.

(九州芸術工科大 2003) (m20034806)

0.268 (1) 3 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) a を実数とする. このとき, 3 次正方行列 $\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ が逆行列を持つための条件を求めよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054803)

0.269 次の行列式を因数分解せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$$

0.270 次の行列の行列式を求めよ.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2003) (m20034926)

0.271 次の行列 B について, 以下の問いに答えよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列式 $|B|$ を計算せよ.
- (2) 2つのベクトル $(1, -2, 4), (-2, 4, -3)$ が 1 次独立であることを示せ.
- (3) B の階数 $\text{rank} B$ を求めよ.

(佐賀大 2003) (m20034927)

0.272 以下の各問に答えよ. ただし, $\text{adj} A$ は行列 A の余因子行列, E は単位行列, $\det A$ は行列 A の行列式を表すものとする.

- (1) n 次行列 A について

$$(\text{adj} A)A = A(\text{adj} A) = (\det A)E$$

となることを利用して

$$\det(\text{adj} A) = (\det A)^{n-1}$$

が成り立つことを示しなさい.

- (2) 次の 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

について, $\det A$, $\text{adj} A$, $\det(\text{adj} A)$, A^{-1} を求めなさい.

(佐賀大 2004) (m20044929)

0.273 次の行列式に関する等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & bc & ac \\ bc & a^2 + c^2 & ab \\ ac & ab & b^2 + c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}^2$$

(佐賀大 2005) (m20054906)

0.274 以下の問に答えよ.

- (1) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式を計算せよ. 答えはなるべく簡単に因数分解した形で書け.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2005) (m20054918)

0.275 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ の行列式 $\det A$ および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2006) (m20064921)

0.276 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

- (1) $2A - B$ の値を求めよ.
- (2) ${}^tA {}^tB$ の値を求めよ.
- (3) 行列 A の逆行列 A^{-1} の値を求めよ.
- (4) tB の行列式 $\det({}^tB)$ の値を求めよ.

${}^tA, {}^tB$ はそれぞれ行列 A の転置行列, 行列 B の転置行列を表す.

(佐賀大 2006) (m20064932)

0.277 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の行列式 $|A|$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(佐賀大 2007) (m20074912)

0.278 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2009) (m20094918)

0.279 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 13 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2012) (m20124918)

0.280 次の行列式の値を計算せよ

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2014) (m20144905)

0.281 n 行 n 列の直交行列の行列式は ± 1 となることを示せ.

(佐賀大 2015) (m20154912)

0.282 次の行列式の値を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2015) (m20154922)

0.283 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2016) (m20164919)

0.284 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

(佐賀大 2017) (m20174905)

0.285 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるとき, 以下の問いに答えなさい.

- (1) A の行列式を求めなさい.
- (2) A の逆行列 A^{-1} の $(4,4)$ 成分を求めなさい.

(佐賀大 2018) (m20184905)

0.286 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 & 8 \\ 0 & 6 & -9 & 8 \\ -9 & -1 & -4 & -6 \\ 6 & 8 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

の行列式に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $|A|$ の変形と余因子展開を行って,

$$|A| = c|B|$$

となる 3 次正方行列 B と実数 c を一組求めよ.

- (2) 行列式 $|B|$ の値を求めて, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(佐賀大 2022) (m20224911)

0.287 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(長崎大 2005) (m20055015)

0.288 次の (a),(b) の行列式の値をそれぞれ求めよ.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad (b) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix} \quad \text{ただし, } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

(長崎大 2008) (m20085017)

0.289 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

(長崎大 2011) (m20115022)

0.290 a, b, c をそれぞれ任意の数とするとき, 次の行列式に関して

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

となることを示せ.

(鹿児島大 2001) (m20015419)

0.291 次の行列式と行列に関する問いに答えよ.

$$(1) \text{ 次の行列式の値を求めよ. } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする. } A^2, A^3, A^4, A^5 \text{ を求め, } A^n \text{ を一般形で表せ.}$$

(鹿児島大 2007) (m20075404)

0.292 次のベクトルと行列式に関する問いに答えよ.

(1) 次のベクトル \mathbf{a} がベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ の一次結合で表すことができるための α, β の条件を求めよ.

$$\mathbf{a} = (0 \quad \alpha \quad \beta), \quad \mathbf{b}_1 = (2 \quad -1 \quad 1), \quad \mathbf{b}_2 = (2 \quad 1 \quad 3)$$

(2) 次の関係式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

(鹿児島大 2008) (m20085404)

0.293 行列 A, B は以下の値とする.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

- (1) 和 $A + B$ を求めよ. (2) 積 AB を求めよ. (3) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(鹿児島大 2008) (m20085411)

0.294 空間に直交座標系 (x, y, z) をとる. 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を含む平面の方程式は,

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ と書くことができる. 以下の設問に答えなさい.

- (1) ベクトル (a, b, c) はこの平面に垂直であることを示せ.
 (2) 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を含み, 異なる二方向ベクトル $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)$ に平行な平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

(鹿児島大 2009) (m20095403)

0.295 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ がある. 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の行列式を求めなさい.
 (2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2013) (m20135409)

0.296 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2015) (m20155409)

0.297 (1) 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

- (2) 次の行列 A に対して $A = A^{-1}$ が成り立つとする. このときの x と y を求めよ. ただし, x は自然数であり, y は整数であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2016) (m20165409)

0.298 次の行列式の値が 0 であるときの a を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2017) (m20175409)

0.299 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ の値を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185409)

0.300 行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. 以下の問いに答えなさい.

- (1) A^2 を求めなさい.
- (2) 行列式 $|A|$ が $|A| = 0$ となる a の値を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185428)

0.301 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

(鹿児島大 2018) (m20185435)

0.302 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & a \\ -1 & a & 1 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ の行列式が 4 となるときの a の値を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215409)

0.303 (1) 次の行列の計算を求めよ.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列の余因子行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(4) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2021) (m20215412)

0.304 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

- (1) 行列 A の行列式の値を求めなさい.
- (2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225409)

0.305 つぎの行列 A に関し、以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

(1) 次式が成り立つことを示せ.

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}^2 = A$$

(2) A の行列式を求めよ.

(室蘭工業大 2006) (m20065512)

0.306 次の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2006) (m20065515)

0.307 3行3列の正方行列 A を以下のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & b & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1) 以下の3つの基本変形に関連して、行列式は以下の性質をもつ.

- (a) 2つの行を入れ換えると、行列式の値は -1 倍される.
- (b) ある行の定数倍をほかの行に加えても、行列式の値は変わらない.
- (c) ある行を c 倍すると、行列式の値も c 倍される.

上記の基本変形を利用して、 A を上三角行列に変形せよ. ここで、上三角行列とは、行列の i 行 j 列成分 (ただし、 $i > j$) がゼロである行列のことである.

(2) A の行列式を求めよ.

(室蘭工業大 2009) (m20095503)

0.308 次の等式が成り立つような k の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} k+1 & 6 \\ 2 & k-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} k+3 & -1 & 1 \\ 7 & k-5 & 1 \\ 6 & -6 & k+2 \end{vmatrix} = 0$$

(室蘭工業大 2009) (m20095505)

0.309 行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ としたとき、次の問いに答えよ.

- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.
- (2) 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (3) 行列 A の2乗 A^2 を求めよ.
- (4) 行列 A の N 乗 A^N を求めよ.

(室蘭工業大 2010) (m20105502)

0.310 以下の(1),(2),(3)に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき, 行列の積 AB を求めなさい.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -x \\ 1 & -6 & 11 & 6 \end{vmatrix}$ が正となる実数 x の条件を求めなさい.

(室蘭工業大 2011) (m20115511)

0.311 3つのベクトルが, 以下のように与えられているとする.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ を求めよ. さらに, 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2015) (m20155509)

0.312 以下の行列 A の行列式を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016) (m20165504)

0.313 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) 行列式 $|A|$ を計算せよ.

(室蘭工業大 2018) (m20185509)

0.314 以下の行列式の値を求めなさい.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

(室蘭工業大 2018) (m20185512)

0.315 行列 $A = \begin{pmatrix} a^5 & 0 & a^5 & a^5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ a^5 & 1 & a^5 & 2a^5 \\ a^5 & 1 & 2a^5 & a^5 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) $a = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 A の行列式の値を示せ. ただし、 $j = \sqrt{-1}$ である.

(室蘭工業大 2022) (m20225511)

0.316 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(岡山県立大 2007) (m20075603)

0.317 行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となる (a, b, c) の組を、すべて求めよ.

(島根大 2005) (m20055803)

0.318 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

(島根大 2005) (m20055804)

0.319 $u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ について、次の問いに答えよ.

(1) 行列式の値 u を求めよ.

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}$ を求めよ.

(3) $\frac{\partial u}{\partial y}$ を求めよ.

(4) $\frac{\partial u}{\partial z}$ を求めよ.

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を求めよ.

(島根大 2006) (m20065802)

0.320 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 \\ 12 & 123 & 1234 \\ 123 & 1234 & 12345 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{vmatrix}$

(島根大 2006) (m20065803)

0.321 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の (a)~(e) を求めよ.

(a) A^T ,

(b) AA ,

(c) $|A|$,

(d) A の階数,

(e) A^{-1}

ただし、 A^T は A の転置行列を表す. $|A|$ は A の行列式である.

(島根大 2006) (m20065811)

0.322 $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ とおく. このとき,

- (1) A の行列式を求めよ. (2) $x = y = z = 1$ のとき, A の逆行列を求めよ.

(島根大 2007) (m20075801)

0.323 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(島根大 2010) (m20105805)

0.324 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 6 & 13 \\ 10 & 5 & 7 & 21 \end{vmatrix}$$

(島根大 2012) (m20125803)

0.325 行列 $B = \begin{bmatrix} 2 & b & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 行列 B の余因子行列を求めよ.
 (2) B が正則であるための b の条件を求めよ. さらに B が正則であるとき, B の逆行列を求めよ.

(島根大 2015) (m20155804)

0.326 次の行列式を因数分解せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

(首都大 2003) (m20035902)

0.327 次の問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ について行列式の値を求めよ, さらに, 全ての固有値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ について行列式の値を求めよ.

(首都大 2004) (m20045901)

0.328 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ が与えられたとき, $AB = I$ を満たす行列 B を求めよ.
ただし, I は単位行列である.

(首都大 2005) (m20055901)

0.329 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ のとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}$ を満たす対称行列 Q を求めなさい. ただし, \boldsymbol{x}^T は \boldsymbol{x} の転置である.
- (2) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.
- (3) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(首都大 2014) (m20145902)

0.330 行列 A について以下の (1),(2) に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式 $|A|$ を求めなさい.
- (2) 行列 A の逆行列を求めなさい.

(首都大 2015) (m20155901)

0.331 次の 4 次正方行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

- (1) ${}^t A$ を A の転置行列とすると, 積 ${}^t A A$ を計算せよ.
- (2) (1) の結果を用いて, A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(首都大 2016) (m20165909)

0.332 (1) 以下の行列 A に関して行列式 $\det A$ を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (2) 前問 (1) の行列 A に関して余因子行列 $\text{adj} A$ および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 以下の行列 B に関して 余因子行列 $\text{adj}B$ の行列式 $\det(\text{adj}B)$ を求めよ.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & a & b \\ c & a & 0 & b & c \\ a & b & c & a & b \\ c & a & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

(東京都立大 2022) (m20225901)

0.333 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ が正則か否かを行列式の値を計算して判定し, 正則であればその逆行列を求めよ.

(滋賀県立大 2007) (m20076003)

0.334 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(滋賀県立大 2022) (m20226004)

0.335 次の行列 A について, 下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 A の行列式の値が 1 となるときの a の値を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.
- (2) (1) で求めた a の値に対する, 行列 A の逆行列を求めよ. なお, 計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2020) (m20206101)

0.336 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $a + b + c = 0$ のとき, A の行列式の値を求めよ.
- (2) A の行列式を因数分解せよ.

(はこだて未来大 2010) (m20106302)

0.337 複素数 x に関する次の方程式を解け.

$$\begin{vmatrix} x^2 + 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 + 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^2 + 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 + 1 \end{vmatrix} = 0$$

(はこだて未来大 2013) (m20136304)

0.338 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 7 & 10 \\ 11 & 6 & 9 & 19 \\ 10 & 6 & 8 & 18 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2007) (m20076401)

0.339 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 8 & 16 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2010) (m20106401)

0.340 (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ の値を求めよ

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(東京海洋大 2011) (m20116401)

0.341 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(東京海洋大 2012) (m20126401)

0.342 $\begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$ を満たす実数 a をすべて求めよ.

(東京海洋大 2021) (m20216405)

0.343 $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & 0 \\ a & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ となる a を全て求めよ.

(東京海洋大 2022) (m20226401)

0.344 以下の行列式を計算せよ.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(琉球大 2009) (m20096803)

0.345 次の行列 A, B について、あとの問いに答えなさい。解答は途中の式も省略せず書きなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい。
- (2) 行列式 $|A|, |B|$ をそれぞれ答えなさい。

(岩手県立大 2013) (m20137003)