[選択項目] 年度：1991〜2023 年　分野：12 線形変換

0.1　２次の正方行列 A による１次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える．ただし, A, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の要素はすべて実数である．このとき，以下の設問に答えよ．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される４つの点の像を求めよ．また，この４つの点を頂点とする四角形の面積が，１次変換前と比較して１次変換後に何倍になるかを求めよ．ただし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ で与えられる．

(2) A を直交行列 $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$(ただし，$r^2 + s^2 = 1$) とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される４つの点の像を求めよ. また，この４つの点を頂点とする四角形の面積が，１次変換前と比較して１次変換後に何倍になるかを求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする． このとき，A は対称行列である． A を直交行列を用いて対角化せよ．

(4) (3) と同じく，$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される４つの点の像を考える．この４つの点を頂点とする四角形の面積が，１次変換前と比較して１次変換後に何倍になるかを求めよ.

(北海道大 2014)　　(m20140102)

0.2　次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい.

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい.

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい． ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\,\boldsymbol{x}$ で求めることができる． ここで，T は転換を表す.

(北海道大 2018)　　(m20180103)

0.3　$f\ :\ R^2 \to R^3$ を線形写像とする．$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるとする.

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ.

(北見工業大 2010)　　(m20100204)

0.4　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする．次の問いに答えなさい.

(1)　線形変換 f によって直線 $\ell : x-1 = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+1}{3}$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(2)　線形変換 f によって平面 $\alpha : x+y+z=1$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(3)　逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい.

(4)　線形変換 f によって平面 $\beta : x+y=1$ に移されるもとの図形を求めなさい

(岩手大 2011)　　(m20110302)

0.5　原点と点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ を頂点とする空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の立方体を，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で変換する．変換後の体積を求めよ．また，A は逆行列をもつか，簡潔な理由を添えて答えよ.

(秋田大 2006)　　(m20060402)

0.6　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線で，次の性質を持つものを考える.

(性質)　この直線上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を，行列 A で変換した点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ も，この直線上にある.

例えば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は任意の実数})$$

と表される直線 l_1 は，このような直線の一つである．この性質を持つ，l_1 と異なる直線を全てあげなさい.

(秋田大 2016)　　(m20160404)

0.7　2 次方程式 $4x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$ の解を α, β とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1)　和 $\alpha+\beta$，積 $\alpha\beta$ を求め，$\alpha^2+\beta^2$ の値を答えよ.

(2)　$|\,\alpha-\beta\,|$ および $|\,\alpha^4-\beta^4\,|$ の値を求めよ.

(3)　行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \beta^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，双曲線 $x^2-y^2=1$ を移したときの関数を求めよ.

(秋田大 2021)　　(m20210402)

0.8 xy 平面上に２点 $P(a,b)$, $Q(c,d)$ がある．原点 O と点 P,Q は同一直線上にはなく，また $d \neq 0$ とする．点 R をベクトル $\overrightarrow{OR}$ がベクトル $\overrightarrow{OP}$ とベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の和に等しくなるようにとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 P,R を通る直線と x 軸との交点 $S(e,0)$ の x 座標 e を a,b,c,d で表わせ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を２辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(3) 点 P を点 S に移し，点 Q を点 $T(0,d)$ に移す一次変換を K とする．K による点 R の像を求めよ．

(4) (3) で定義した一次変換 K を表す行列を求めよ．

(東北大 1994) (m19940504)

0.9 ３つの１次変換を f,g,h とし，これらを表す行列をそれぞれ A,B,C とおく，また，任意の点 $P(x,y)$ の２つの合成変換 $f\circ h$, $h\circ g$ を $f\circ h(P)=f(h(P)), h\circ g(P)=h(g(P))$ と定義し，$f\circ h=h\circ g$ が成立するとする．$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ， $C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，a は $a\neq 0$ の実定数とする．

(1) 点 P の変換 h により移される点を P' とする．P' の原点からの距離は，P の原点からの距離に等しいことを示せ．

(2) g を表す行列 B を求めよ．

(3) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 Q の変換 $f\circ h$ により移される点を Q' とする．Q' の原点からの距離の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 1996) (m19960503)

0.10 点 $X(x,y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x',y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x,y,x',y' を r,α,θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,\quad S'=\frac{1}{2}|x_1'y_2'-x_2'y_1'|$$

を用いて，$S=S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y'=1$ 上に位置し，$S'=\dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1,y_1,x_2,y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1'=0,\ x_2'>0,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001) (m20010503)

0.11 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y=ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y=ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 U を $U=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$U^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は 0 でない実数とする．

(4) 行列 P を $P=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(東北大 2003)　　(m20030503)

0.12 平面の単位正方形 $\{(x,y)|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ を，４点 $(0,0),(1,2),(0,4),(-1,2)$ を頂点とする菱形に写すような線型写像（2×2 型行列）を決定せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010608)

0.13 $P^TP=I$ を満たす行列 P を直交行列と呼ぶ．ここに P^T は P の転置行列を，I は単位行列を表す．

(1) ３次の実直交行列 P が３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ に線形変換として働くとき，P により位置を変えない直線が少なくとも一本存在することを示せ．

(2) 上の直線を z 軸に取ったとき，P はどのような形となるか？

(3) 上の形をもとに，P の空間への作用の仕方を説明せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010609)

0.14 以下に与えられる３行３列の行列 A を考える．

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

また，xyz 座標系の基底ベクトルを $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ と表す．

$$\overrightarrow{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{e_z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(1) $A\overrightarrow{e_x}$，$A\overrightarrow{e_y}$，および $A\overrightarrow{e_z}$ を計算せよ．

(2) 行列式 $detA$ を計算せよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 基底ベクトル $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ を三辺とする立方体を考える．変換 A によって，その体積は何倍に変換されるか．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010610)

0.15 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f は,

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} を \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} に,\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} を \begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} に,\quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} を \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} に,$$

それぞれ写すとする.

(1) ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ の線形写像 f による像を求めなさい.

(2) 線形写像 f で $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ に写される $\mathbb{R}^3$ の元を求めなさい.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090605)

0.16 二次元平面上で x y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y' とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100606)

0.17 (1) 座標系 $\{x, y\}$ から $\{x', y'\}$ への線形変換で, $x^2 - y^2$ を不変にするものを求めてください.

(2) 正方形はどのように変換されるか, 2 次元面に図示してください.

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140604)

0.18 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{5} = 1$ はどのような図形に変換されるか, 図形の方程式を示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220602)

0.19 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$　を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{u}$ の組をすべて求めよ.

(2) 2 点 P, Q と原点 O を頂点とする三角形 OPQ の各頂点の位置ベクトルが A によって一次変換されるとき, その三角形の面積が何倍になるか答えよ.

(東京大 2001)　　(m20010701)

0.20 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ で定義される xy 平面の 1 次変換について, 以下の問いに答えよ.

(1) 直線 $y = 3x$ の像を求めよ.

(2) 原点を通る直線のうち, その像が原点だけになるものを求めよ.

(3) 原点を通る直線のうち, その像がその直線自身になるものを求めよ.

(4) この 1 次変換による xy 平面の像を図示せよ.

(電気通信大 2009)　　(m20091001)

0.21 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を平面 $x+z=0$ に関する対称移動とし，$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を平面 $y-z=0$ に関する対称移動とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 平面 $x+z=0$ の原点を通る法線に点 (x,y,z) からおろした垂線の足を P とするとき，点 P の座標を求めよ．

(2) $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対し，$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ．

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ を解け．

(4) 平面 $x+z=0$ と平面 $y-z=0$ のなす角 θ を求めよ，ただし，$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(5) $g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる．軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ．

(電気通信大 2013) (m20131002)

0.22 $xyz-$ 空間内に 4 つの頂点 A , B , C , D をもつ正 4 面体があり，その中心は原点 O と一致する．A の座標が $(-1,1,1)$ ， B の座標が $(1,-1,1)$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) 他の 2 つの頂点 C , D の座標を求めよ．

(2) 空間内の 1 次変換 f が，

$$f(\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OB}\,,\ \ f(\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}\,,\ \ f(\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OD}\,,\ \ f(\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OC}$$

を満たすとき， f を標準的な xyz-空間の座標で表した行列を求めよ．

(横浜国立大 1994) (m19941102)

0.23 n 次元実ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ を n 次元実ベクトル $\boldsymbol{p}_{i+1}$ に移す線形変換

$$\boldsymbol{p}_{i+1}=A\boldsymbol{p}_i$$

を考える. ただし, A は n 次実正方行列である. 次の設問に答えよ.

(1) この線形変換でベクトルのノルム（大きさ）が変化しないための条件を求めなさい.

(2) この線形変換で，ゼロベクトルでない，変化しないベクトルが存在するための条件を求めなさい.

(千葉大 2005) (m20051202)

0.24 線形写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ $\quad f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ax_1+ax_2+\ \ x_3 \\ ax_1+\ \ x_2+ax_3 \\ x_1+ax_2+ax_3 \end{bmatrix}$ $\quad (a\in\boldsymbol{R})$
について，以下の問に答えなさい．

(1) f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ．

(2) f が全単射（写像の表現行列が正則）となる条件を求めよ．

(3) f が全単射であるとき，逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2007) (m20071315)

0.25 点 $P(3,1)$ と直線 $y=x$ について対称な点を Q， Q を原点を中心に反時計回りに 90° 回転した点を R とするとき，R の座標を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081327)

0.26 3次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において, 平面 $P : x-y+z+1=0$ と直線 $L : 2(x-1)=-y=-z$ を考える.

(1) 平面を張る2つの線形独立（一次独立）なベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, 直線を張るベクトル $\boldsymbol{a}_3$ を求めよ.

(2) 任意の点を直線 L と平行に平面 P 上へ射影する線形変換を表す行列 A を求めよ.

(3) 任意の点を平面 P と平行に直線 L 上へ射影する線形変換を表す行列 B を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101313)

0.27 ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

に対して線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{e}_1$, $f(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{e}_2$ を満たすとき，未知数 y を成分に含むベクトル

$$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\y\\1\end{bmatrix}$$

に関して以下の設問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(2) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形従属のとき，$\boldsymbol{c}$ の f による像 $f(\boldsymbol{c})$ を求めよ.

(3) $f(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}_3$ ならば，f に逆写像 f^{-1} が存在し，$f^{-1}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A は $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$ に等しいことを示せ.

(4) $f(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{e}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{x})=B\boldsymbol{x}$ を満たす行列 B を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111310)

0.28 ３次元幾何ベクトル空間において,

平面 A :　$x+y+mz-1=0$

平面 B :　$x+my+z-3=0$

平面 C :　$mx+y+z-2m=0$

を考える．ただし，m は実定数とする.

(1) 3平面が一点でのみ交わる条件を求めよ.

$m=0$ のとき，以下の (2) から (5) の問いに答えよ.

(2) 平面 A，平面 B，平面 C の交点を求めよ.

(3) 平面 A と平面 B の交線 L と平行なベクトル $\boldsymbol{a}_1$ を求めよ.

(4) 平面 C を張る2つの線形独立（一次独立）なベクトル $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を求めよ.

(5) ３次元空間中の任意の点を交線 L と平行に平面 C 上へ射影する線形変換を表す行列 Q を求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121302)

0.29 零ベクトルでない m 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影を考える．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$（ただし添字 T は転置を表す）および，$\boldsymbol{a}$ を正規化したベクトル $\dfrac{1}{||\boldsymbol{a}||}\boldsymbol{a}$（ただし $||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルムを表す）を用いると，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ への射影 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}||^2}\boldsymbol{a}$$

と書ける.

(1) $\boldsymbol{p} = P\boldsymbol{b}$ となるような射影行列 P を求めなさい.

(2) $P^2 = P$ となることを示しなさい.

(3) I を単位行列としたとき，$I - P$ もまた射影行列となる．このとき，$\boldsymbol{b}$ を $I - P$ で射影して得られるベクトル $\boldsymbol{c}$ と，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の関係を図示しなさい，

(筑波大 2019)　　(m20191303)

0.30 $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである.

(1) $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ.

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.31 直交座標系の座標軸 O-xyz を，原点を固定して回転した座標軸を O-XYZ とする．直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ，新座標系の正規直交形で

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ と表されたとき，以下の設問に答えよ.

(1) 旧座標系で表された点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ の新座標系での座標を求めよ.

(2) 新座標系で $(0, 4, 2)$ と表される点の旧座標系での座標を求めよ.

(埼玉大 2014)　　(m20141401)

0.32 xyz 空間のベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する線形変換について，以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ を y 軸に対して対称移動させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ を z 軸のまわりに角 θ だけ回転させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ.

(埼玉大 2016)　　(m20161404)

0.33 点 (x, y) を点 (x', y') に対応づける xy 平面上の写像は，その対応づけが行列の計算として，下式のように書けるとき，1 次変換と呼ばれる（ここで a, b, c, d は定数であり，下式は「$x' = ax + by$ かつ $y' = cx + dy$」と同値）.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f について，以下の 2 問に答えよ.

(1) この 1 次変換 f が原点以外にも「変換の影響を受けない点」（すなわち，変換によって位置が変わらない点）をもつように k の値を定めよ．

(2) 前問 (1) の 1 次変換で「変換の影響を受けない点」の全体は，xy 平面上の直線を形成する．この直線の方程式を求めよ．

（群馬大 2006）　　(m20061503)

0.34 2 次元の実座標平面上のベクトルを直線 $y = 5x$ に関して線対称移動する変換 f を考える．また，基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 基底となる 2 つの直交するベクトルを $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$，$\mathbf{a}_2 = -5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ とする．また，直線 $y = 5x$ に関してベクトル $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ と線対称なベクトルを $S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ とする．即ち，$f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) = S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ で，S, T, s, t は実数．このとき，S, T を s, t を用いた式で表せ．

(2) 基底であるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対応する変換 f の行列 A を求めよ．

(3) $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ．

(4) $f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 F を行列 A, B を用いて表し，行列 F を求めよ．

（山梨大 2003）　　(m20031806)

0.35 3 次元デカルト座標系で (x, y, z) と表される点を任意の軸のまわりに回転させる演算子に関して，次の設問に答えよ．

(1) 点 (x, y, z) を z 軸のまわりに，その軸の正方向からみて反時計回りに角度 ϕ 回転させる演算子を，3 行 3 列の行列 $R_z(\phi)$ で表す．このとき，$R_z(\phi)$ を求めよ．

(2) 設問 (1) の $R_z(\phi)$ において，角度 ϕ が微小量 ϵ であるとき，ϵ の 2 次のオーダーまで考慮して $R_z(\epsilon)$ を求めよ．

(3) 設問 (1), (2) と同様にして，x 軸，y 軸のまわりの回転を表す行列 $R_x(\epsilon)$, $R_y(\epsilon)$ を，それぞれ ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で求めよ．

(4) $R_x(\epsilon)$ と $R_y(\epsilon)$ の交換関係を $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ と書き，$[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)] = R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon)$ とする．このとき $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ を ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で，単位行列 I と $R_z(\epsilon^2)$ を用いて表せ．

（山梨大 2017）　　(m20171803)

0.36 $\mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ :\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をユークリッド空間とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) A を 3 次の実正則行列とする．$\mathbb{R}^3$ の線型変換 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する．点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ に直交する平面を W とする．このとき，$T(W)$ は点 $A\boldsymbol{p}$ を通り，ベクトル ${}^t(A^{-1})\boldsymbol{v}$ に直交する平面であることを示せ．ここで，${}^t(A^{-1})$ は，A の逆行列 A^{-1} の転置行列である．

(2) a, b, c を正の実数とし，楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ を C とする．C 上の点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ における C の接平面の方程式を求めよ．

（新潟大 2006）　　(m20062006)

0.37 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f によって，直線 $2x-y+1=0$ が直線 $5x-y+7=0$ に移されるとき a,b の値を求めよ．

(新潟大 2011)　　(m20112010)

0.38 x-y 平面上の曲線 $y=2x^2$ を，原点のまわりに 45 回転して得られる曲線の方程式を求めよ　.

(新潟大 2014)　　(m20142009)

0.39 次の一次変換 $f,\ g$ について答えよ．

(1) 原点を中心として左回りに角度 θ だけ回転させる変換 f を表す行列を求めよ．

(2) 原点を中心とする相似比 k の相似変換 g を表す行列を求めよ．

(3) f と g の合成変換 $f\circ g$ を表す行列を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152011)

0.40 X-Y 座標平面上に点 $A(x_1,\ y_1)$ がある．原点を中心として点 $A(x_1,\ y_1)$ を 45° 回転した時の座標点 $B(x_2,\ y_2)$ を求めよ．また点 $A(x_1,\ y_1)$ を，点 $P(1,2)$ を中心として 60° 回転した時の座標点 $C(x_3,\ y_3)$ も求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172003)

0.41 2 次元デカルト座標系において，1 次変換 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を考える．この変換をベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)^T$ に作用させ，変換後に得られるベクトル $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ の方向が変換前のベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向と一致し $\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}$ のように表せるとき，このベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を求めよ．ただし，ベクトルの長さは $||\boldsymbol{x}||=1$ であるものとする．

(新潟大 2017)　　(m20172007)

0.42 2 つの行列 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ．

(3) 4 つの行列 $A,\ B,\ A^{-1}$ および AB は，いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x,y)$ をそれぞれ異なる $P'(x',y')$ に移動させる．$A,\ B,\ A^{-1}$ および AB が，それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか，幾何学的意味を述べよ．

(新潟大 2020)　　(m20202007)

0.43 空間の点 (x,y,z) の平面 $z=\sqrt{3}x$ に関する対称点を (x',y',z') とする．$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942107)

0.44 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される空間の 1 次変換を f とする．点 $P(x,y,z)$ が球面 : $x^2+y^2+z^2=1$ 上を動くとき，点 $f(P)$ と定点 $Q(0,1,0)$ との距離の最大値および最小値を求めよ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952105)

0.45 以下の問いに答えよ．

(1) 点 $P(x,y)$ から x 軸に下ろした垂線の足（P が x 軸上にあるときは P 自身）を $P'(x',y')$ とする．P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(2) 点 $P(x,y)$ から直線 $y=kx$（k は定数）に下ろした垂線の足（P がこの直線上にあるときは P 自身）を $P'(x',y')$ とする．P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 B を求めよ．

(長岡技科大 1999)　　(m19992104)

0.46 xyz 空間において, 平面 $H : x+y+z=0$ に関する対称移動を表す行列を A とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) $s+t+u=0$ を満たす s,t,u について，$A\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ を求めよ. また，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 等式 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s+t+u=0$ が成り立っているとき, k,s,t,u を x,y,z で表せ.

(3) 任意の x,y,z に対して, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めよ.

(4) A を求めよ.

（長岡技科大 2004）　　(m20042103)

0.47 実数 θ に対して $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,　$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．以下の問いに答えなさい.

(1) $R(\theta)K = KR(-\theta)$ を示しなさい.

(2) 原点を通る傾き $\tan\theta$ の直線に関する対称移動を表す行列を $A(\theta)$ とするとき，$A(\theta) = R(2\theta)K$ を示しなさい.

(3) $A\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)A(\theta) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる $A(\theta)$ を求めなさい.

(長岡技研大 2007)　　(m20072102)

0.48 (1) xy 平面上の点 (x,y) の y 軸に関する対称点を (x',y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい.

(2) xy 平面上の点 (x,y) の直線 $y=ax$ に関する対称点を (x',y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい.

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき，a の値を求めなさい.

(長岡技科大 2009)　　(m20092102)

0.49 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，下の問いに答えなさい.

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 曲線 $C : 5x^2 + 12xy + 8y^2 - 4 = 0$ の A による像 C' の方程式を求め，C' の概形を図示せよ.

(長岡技科大 2015)　　(m20152101)

0.50　xy 平面上に 3 点，$A(1,\ 1)$, $B(3,\ 1)$, $C(1,\ 4)$ を頂点とする三角形がある．この 3 つの頂点を線形写像 T により変換するとき，次の各問いに答えよ．ただし，線形写像 T は行列 $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えれれる．計算の概略も示すこと．

(1)　頂点 A, B, C の変換後の各頂点を A', B', C' とする．これら 6 点を xy 座標平面上に座標の値とともに図示せよ．

(2)　点 A', B' を通る直線をベクトル表示せよ．同様に点 A', C' を通る直線をベクトル表示せよ．

(3)　(2) の 2 直線が直交することをベクトルの内積を使って示せ．

(4)　三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の面積比を求めよ．

(富山大 2015)　　(m20152308)

0.51　直線が $y = x - 1$ ある．

(1)　この直線を原点のまわりに角 θ ($0° \leqq \theta \leqq 180°$) だけ回転して得られる直線を求めなさい．

(2)　この回転した直線が曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と交わらないための角 θ の範囲を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002414)

0.52　以下に二つの線型変換がある．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1)　これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ．

(2)　A, B による合成変換の行列を求めよ．

(3)　(2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ．

(4)　(2) で求めた合成変換によって，直線 $y = 3x + 2$ はどのような図形に変換されるか．

(福井大 2001)　　(m20012418)

0.53　次の行列 $\mathbf{B}$，ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がある．3 次元の空間でベクトル $\mathbf{a}$ は (x_1, y_1, z_1) の点を表し，ベクトル $\mathbf{b}$ は $(1, 0, 0)$ の点を表し，ベクトル $\mathbf{c}$ は直線を表す．

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ \text{ここでtは任意の実数},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1)　線形変換（一次変換）$\mathbf{y_1} = \mathbf{Bb}$ によって，ベクトル $\mathbf{b}$ は 3 次元座標でどこに移されるかわかるように図に描きなさい．

(2)　線形変換（一次変換）$\mathbf{y_2} = \mathbf{Bc}$ によって，ベクトル $\mathbf{c}$ は 3 次元座標でどこに移されるか．ベクトル $\mathbf{y_2} = \mathbf{Bc}$ を図に描き，どのような形か説明しなさい．

(福井大 2003)　　(m20032415)

0.54　$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ の表わす 1 次変換によって，直線 $x - y + 1 = 0$ が直線 $x + 2y + 3 = 0$ に写されるとき，a, b の値を求めよ．

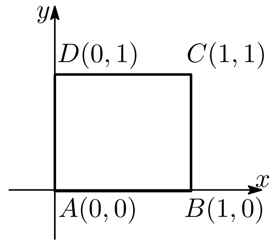
(福井大 2003)　　(m20032416)

0.55 xy 平面上における同一平面上への一次変換が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられている. xy 平面上の図形 $ABCD$ が,

どのような図形に変換されるか図示しなさい.



(福井大 2004)　　(m20042418)

0.56 次の行列 $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ がある．行列 $\boldsymbol{B}$ で定まる一次変換で，平面の図形　$2{x_1}^2 + {y_1}^2 = 4$　が異なる図形にうつされる．

(1) 変換後の図形の式を求めなさい．　(2) 変換後の図形を描きなさい．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(福井大 2006)　　(m20062406)

0.57 縦軸を y とし，横軸を x とする座標系でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ が $\dfrac{{x_1}^2}{4} + {y_1}^2 = 1$ 上の点であるとする．

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ として，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で一次変換する.

(1) 一次変換後の $\boldsymbol{y}$ の関係式を求めよ.

(2) 一次変換後の x_2 と y_2 の関係が表す形を描け.

(福井大 2012)　　(m20122413)

0.58 2 次元平面で，整数 d を含む次の二次正方行列でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ を一次変換するとベクトル $\boldsymbol{y}$ に移る.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} d & 3/5 \\ 5 & 2d \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ がある直線を表すベクトルのとき，そのすべての点について，一次変換で位置が変わらなかったとする．整数 d とその直線の式を求めよ.

(福井大 2013)　　(m20132413)

0.59 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，直線 $y = mx$ 上の点が，同じ直線 $y = mx$ 上の点に変換されるとき，m の値を求めよ.

(岐阜大 2006)　　(m20062619)

0.60 xyz 空間 $(\mathbb{R}^3)$ の線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする．すなわち，A は $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を満たす行列である．次の問に答えよ.

(1) 線形変換 f がベクトルの大きさを変えないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ.

(2) 線形変換 f が x 軸上の点を動かさないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ.

(3) (1) と (2) の条件を満たし，平面 $x+y+z=0$ 上の点を平面 $5x-y+7z=0$ 上に移す線形変換 f を表す行列 A を求めよ

(岐阜大 2016)　　(m20162603)

0.61 平面上で直線 $y=3x+2$ 上の点は，変換行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ である一次変換により，どのような図形上に写像されるか答えよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982712)

0.62 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の二つの問いに答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{d}$ をベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の 1 次結合として表せ．

(2) 一次変換 f に対して，

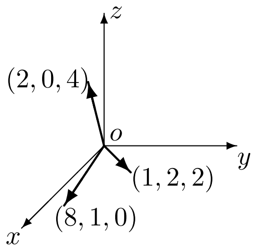
$$f(\mathbf{a})=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{b})=\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\mathbf{c})=\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であるとき，$f(\mathbf{d})$ を求めよ．

(豊橋技科大 2000)　　(m20002707)

0.63 3 本のベクトル：

$$a=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

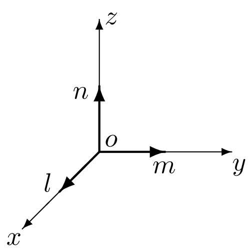


を 3 辺とする平行 6 面体を，これらを列ベクトルとする行列 A

$$A=(a,b,c)=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この平行 6 面体と体積の等しい立方体を，下図に示す基底ベクトル (l,m,n) を用いて，上と同様に行列 $B=(l,m,n)$ で表せ．



(2) 平行 6 面体 A を，変数 $PA = B$ により体積の等しい立方体 B に変換する行列 P を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012709)

0.64 列ベクトル $\boldsymbol{x}= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が平面上の点の座標 (x, y) に対応するとき，次の行列 A を用いて $A\boldsymbol{x}$ で表される 1 次変換について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 平面上の点 $(1, 2)$ はどんな点に移るか．

(2) 平面上の直線 $x + 4y - 1 = 0$ はどのような直線に移るか．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032708)

0.65 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i), $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．

各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}} \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i = \boxed{\text{キ}} \sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\quad ク \quad} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\quad ケ \quad}\right) + \boxed{\quad コ \quad} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x'_i}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y'_i}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\dfrac{7}{4}\pi$ や　$\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.66 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により，曲線 $y = x^2$ の上の点 (x, y) は，曲線 $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ の上の点 (x', y') に移される．$a > 0$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) x, y を用いて x' および y' を表せ.

(2) a を用いて b を表せ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 次変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ によりベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される．$|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}|$ であるとき，a の値を求めよ.

(4) $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ.

(豊橋技科大 2009)　　(m20092703)

0.67 下記の式で表される楕円 C_1 を反時計回りに 45°回転して得られる像を　C_2 とする.

$$c_1 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

(1) C_1 を C_2 に写す一次変換を表す行列 A を求めよ.

(2) 図形 C_2 を表す式を求めよ.

(3) 図形 C_2 上の点 $P(x,\ y)$ において, P が C_2 上を移動する時, $x,\ y$ がそれぞれとる値の範囲を求めよ.

(豊橋技科大 2011)　　(m20112702)

0.68 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の直交座標系の点 $P(x, y)$ は，つぎの 1 次変換 f によって，円 $u^2 + v^2 = 16$ 上の点 $Q(u, v)$ に移される．以下の問いに答えよ.

$$f \ : \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 点 $P(x,y)$ の座標を，偏角 θ を用いて表せ．ただし，偏角とは原点 O を円の中心として，半直線 OP と x 軸の正方向とのなす角である．

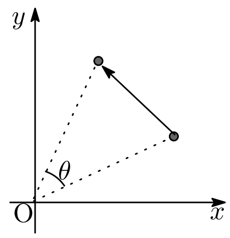
(2) $a\ (>0)$ の値を求めよ．

(3) 点 $P(x,y)$ が上記の 1 次変換 f によって点 $Q(0,4)$ へ移されたとき，点 $P(x,y)$ の座標を求めよ．

(豊橋技科大 2013)　　(m20132704)

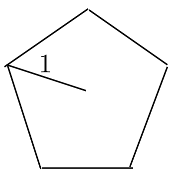
0.69 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2$, ${A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．

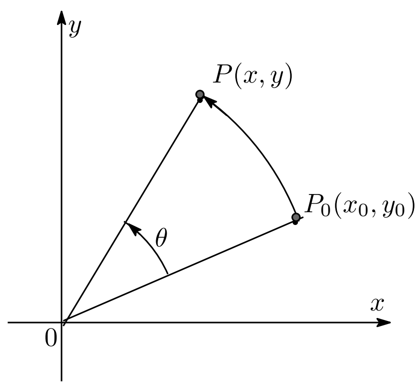


(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.70 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0,y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x,y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ.

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ.

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする.

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.71 (1) $\mathbb{R}^2$ の原点 O を中心とする角 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転移動 F_r を標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して行列で表せ.

(2) 標準基底に関して行列　$A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$　と表される線形写像 $F_t\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ がある．この線形写像 F_t に回転移動 F_r を合成してできる写像を F と表したとき，円 $C\ :\ x^2 + y^2 = 2$ の F による像 $F(C)$ を与える方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062902)

0.72 (x, y, z) 空間における平面 $2x + 3y + 4z + 6 = 0$ を，線形写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって写して得られる (X, Y, Z) 空間の図形の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132905)

0.73 平面内で $ax^2 + 2xy + y^2 = 1$ を表す曲線が双曲線となるような実数 a の範囲を求めよ.

(名古屋工業大 2015)　　(m20152908)

0.74 (1) xy 平面内において, 3 点 $(-2,\ 19)$, $(1,\ -8)$, $(3,\ 4)$ を通る放物線の式 $y = ax^2 + bx + c$ を, 行列を使って求めることを考える. 放物線の式の係数を求める連立一次方程式を書いて, それを行列を使って表現しなさい.

(2) (1) で求めた行列を用いた式を解き, 放物線の式を求めなさい.

(3) xy 平面内の点を原点を中心として反時計まわりに 45°回転させる　1 次変換行列を求めなさい.

(4) (2) で求めた式で表される放物線を, 原点を中心として反時計まわりに 45°回転させて得られる放物線の式を求めなさい.

(三重大 2010)　　(m20103109)

0.75 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について，以下の問に答えよ.

ここで，一次変換とは下式に示すように，任意の平面上の座標 (x, y) を (x', y') に移す変換をいう.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) $a=1,\ b=k$（k は任意の実数）のとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と，直線に写される条件を示せ．また，直線に移された場合の直線の式を求めよ．

(2) 直線 $2x+y=0$ が，直線 $6x-5y=0$ に移されるとき，a,b の値を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113106)

0.76 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ の定める平面の一次変換において，原点を通る不動直線が 1 本のみ存在する場合の a の値を求めよ．ただし，不動直線とは「その像がもとの直線と一致する直線」のことである．

(三重大 2012)　　(m20123113)

0.77 行列 $A=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ による 1 次変換において $x^2-y^2=1$ を満たす不動点 $Q(x,y)$ が存在する．

m の値と点 $Q(x,y)$ を求めよ．

(三重大 2014)　　(m20143110)

0.78 二次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ における $A\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ を満たす定数 k とベクトル $\overrightarrow{u}$ について，以下の各問に答えなさい．

(1) この定数 k の値を求めなさい．

(2) このベクトル $\overrightarrow{u}$ を求めなさい．

(3) A^n を求めなさい．

(4) x-y 二次元平面上に存在しているある直線は，この行列 A を用いた一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって x 軸に一致した．返還前の直線の式を求めなさい．

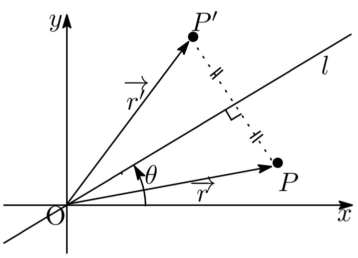
(三重大 2022)　　(m20223104)

0.79 原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して，空間の点 P（位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$）を点 P'（位置ベクトルを $\overrightarrow{r'}$）へ反転させる作用（R_θ と記す）を考える．

$$\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad\longrightarrow\quad\overrightarrow{r'}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=R_\theta\overrightarrow{r}$$

このとき，反転の作用は次のように表わせることを示せ．

$$R_\theta=\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002)　　(m20023208)

0.80 次ののような 2 つの行列 A と B があるとき，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

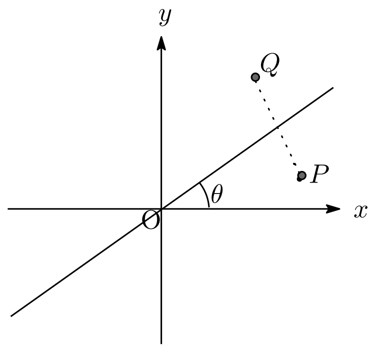
(1) 積 AB を求めよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 2次元ベクトル $\boldsymbol{X}$ に行列 A をかけて, $\boldsymbol{Y}=A\boldsymbol{X}$ を作った. このとき, 2つのベクトル $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ はどのような関係になるか述べよ.

(奈良女子大 2009)　　(m20093207)

0.81　下図のように, 点 P を直線 $y=(\tan\theta)x$ に関して対称な点 Q に移す変換行列を求めよ.



(奈良女子大 2019)　　(m20193209)

0.82　２次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め, その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ とする. また, x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸, y' 軸とし, x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする. このとき, 以下の (1)〜(5) に答えよ.

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x\ \ \boldsymbol{e'}_y)=(\boldsymbol{e}_x\ \ \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する２次の正方行列 P を θ を用いて表せ.

(2) 行列 P に対して $P^T P=P\,P^T=I$ が成り立つことを示し, この等式の幾何的な意味を, ４つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e'}_x$, $\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ. なお, P^T は P の転置行列を, また, I は２次の単位行列をそれぞれ表す.

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y=x'\boldsymbol{e'}_x+y'\boldsymbol{e'}_y$ のように, ２通りの座標を用いて表すことができる. これら２通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ. さらに, $x^2+y^2=\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2$ が成り立つことを示せ.

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha f(\boldsymbol{u})+\beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき, f を一次変換という. ここに α と β は任意の実数, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである. 一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ に対して,

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_x)=a_{xx}\boldsymbol{e}_x+a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y)=a_{xy}\boldsymbol{e}_x+a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{cases} \qquad ④$$

が成り立つとし, ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y$, $f(\boldsymbol{u})=X\boldsymbol{e}_x+Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき, これら２組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ.

(5) 一次変換 f に対して, (4) の条件④に加えて.

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e'}_x)=a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x+a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y)=a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x+a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{cases}$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u}=x'\boldsymbol{e'}_x+y'\boldsymbol{e'}_y$，$f(\boldsymbol{u})=X'\boldsymbol{e'}_x+Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，2 組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ．

(京都大 2009)　　(m20093303)

0.83 x, y をデカルト座標とする R^2 において, 原点以外の点 P を原点 O のまわりに角度 θ だけ反時計回りに回転させた点を P_θ で表す. いま, P を x軸に関して線対称の位置に移した点を　P' とする. さらに, P' を直線 $ax+by=0$ に関して線対称の位置に移した点を P'' とする. ただし, a, b は定数で, 同時にゼロとはならない. 位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP_\theta}$, $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OP''}$ をそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_\theta$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$ で表す. 以下の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{p}_\theta = R\boldsymbol{p}$ をみたす行列 R を見出せ.

(2) $\boldsymbol{p}' = M\boldsymbol{p}$ をみたす行列 M を見出せ.

(3) $\boldsymbol{p}'' = N\boldsymbol{p}$ をみたす行列 N を見出せ.

(4) $\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}_\theta$ が成り立つように, 直線 $ax+by=0$ を定めよ.

(京都大 2010)　　(m20103301)

0.84 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される線形変換を f とする．次の問に答えよ．

(1) この線形変換 f によって動かない点をすべて求めよ．

(2) この線形変換 f によって動かない直線をすべて求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143303)

0.85 直交座標系（デカルト座標系）Γ に対して，$O'(1,\ 1,\ 1)$，$e_x{}' = {}^t\big(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0\big)$，$e_y{}' = {}^t\big(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}\big)$，$e_z{}' = {}^t\big(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\big)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 新座標系 $\Gamma' = \{O'\ :\ e_x{}',\ e_y{}',\ e_z{}'\}$ も直交座標系であることを示し，かつ座標変換 $\Gamma \to \Gamma'$ の式を求めよ．

(2) 座標系 Γ における方程式が $x+y+z=6$ である平面 π の，新座標系 Γ' における方程式を求めよ．

(3) 座標系 Γ における方程式が，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ である直線 g の，新座標系 Γ' における方程式が，$\dfrac{x'-\boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}}=\dfrac{y'-\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}=z'$ になるとき，$\boxed{\text{あ}}$〜$\boxed{\text{え}}$ の空欄に入る数を求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143304)

0.86 行列 $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$ が表す平面上の一次変換を f とする．点 P, Q, R, S をそれぞれ $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$，さらに円 $C: x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ とし，円 C が f によって移される図形を C' とおく．次の問いに答えよ．

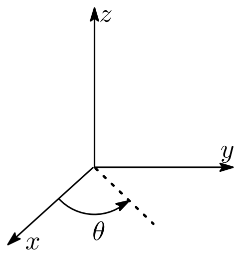
(1) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき f によって四辺形 $PQRS$ はどのような図形に移されるか．

(2) (1) で求めた図形との位置関係に留意して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの図形 C' の概形を描け．

(3) t がすべての実数を動くとき C' が通過しうる点 (x, y) の集合を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023504)

0.87 下図に示すように，3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える．z 軸回りの回転については，回転角 θ の正の方向を，下図の矢印の方向とする．また，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする．このとき，以下の問に答えよ．



(1) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す xy平面に平行な移動　$x' = x + az$，$y' = y + bz$，$z' = z$ を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ．

(2) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ．

(3) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，行列式 $|AB|$ を求め，$(AB)^{-1}$ が存在することを示せ．

(4) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$(AB)^{-1}$ を求めよ．

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ．

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.88 f を $\mathbb{R}^3$ 上の一次変換とするとき，原点を通る直線 ℓ で，ℓ 上の各点が f により ℓ 上に写されるようなものが存在することを示せ．

(神戸大 2013)　　(m20133805)

0.89 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくとき，次の式が成り立つことを示せ．

(1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha + \beta)$　　(2) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$

(鳥取大 2007)　　(m20073914)

0.90 (1) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ において原点を中心に角度 α だけ回転させる線形変換の行列表現を求めよ．

(2) 実数を成分とする $3 \times\ 3$ 行列 X で，$X^3 = I\ \ (X \neq I)$ を満たすものをひとつ求めよ．ただし，I は単位行列を表す．

(岡山大 2008)　　(m20084003)

0.91 (1) 座標平面上の点を直線 $y = ax$（a は実数）に関して対称な点に移す一次変換を考える．
$a = \tan\dfrac{\theta}{2}\ (-\pi < \theta < \pi)$ とおくとき, この一次変換を表す行列 A を θ を用いて表せ．

(2) 2 次直交行列 B の行列式が -1 であるとき, B の表す一次変換はある直線に関して対称な点を対応させる変換であることを示せ.

(岡山大 2010)　　(m20104004)

0.92 座標中の任意の点をある 2 行 2 列の行列 A で変換したとき，$y = ax$ に対して対称移動しました．この時の行列 A を求めなさい．

(山口大 2001)　　(m20014316)

0.93 xy 平面上での次の変換に対応する行列を求めなさい．

(1) 直線 $y = 2x$ に関する対称移動に対応する変換行列

(2) 原点を中心として 60° 回転移動に対応する変換行列

(山口大 2003)　　(m20034310)

0.94 次の平面の線形変換に対応する行列を求めよ．求める過程も述べよ.

(1) 直線 $2x + y = 0$ に関する対称移動となる変換.

(2) 原点を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する変換.

(3) 直線 $x + 2y = 0$ へ正射影する変換.

(4) $y = x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $(2p, 2q)$ に移る．また，$y = -x$ 上の各点 (p, q) は同じ直線上の点 $\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{q}{2}\right)$ に移る．これらの 2 条件を満たす変換.

(高知大 2013)　　(m20134503)

0.95 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $2\times\ 2$ 行列とする．以下の問いに答えよ．なお，行列やベクトルの要素は全て実数とする.

(1) 全ての 2 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$ にたいし $|A\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}|$ となるための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(2) A が (1) の条件を満たすとき，$(ad - bc)^2 = 1$ であることを示せ.

(3) $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ となる 0 ではない 2 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するための A の条件を a, b, c, d で表せ.

(4) A が (1) と (3) の条件を満たし，かつ $ad - bc = 1$ のとき，A を求めよ.

(5) A が (1) の条件を満たし，かつ直線 $y = \sqrt{3}x$ 上の点が A による変換で移動しないとき，A を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094701)

0.96 次の線形変換を考える．以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}\,, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換の像 $\boldsymbol{p}'$ はある平面上に限定される．この平面を表す式を求めよ.

(2) (1) で求めた平面に対する零でない法線方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ.

また，$\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{p} \neq 0$ のとき $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ の最大値を求めよ．$\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ が最大値をとるときの x, y, z の条件を示せ.

(九州大 2020)　　(m20204706)

0.97 以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える．

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ ,\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

(1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ．

イ) x_2, y_2 を用いて，x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ．

(2) 原点を中心とした単位円 $C:\ x^2+y^2=1$ を，線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える．D を表す x, y の方程式を求めよ．

(3) 原点を中心とし，x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される．

$$E\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め，以下の空白ア〜ウを埋めよ．

$$E'\ :\ \left(\boxed{\quad ア \quad}\right)x^2+\left(\boxed{\quad イ \quad}\right)xy+\left(\boxed{\quad ウ \quad}\right)y^2=1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し，その面積を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.98 $a>b>0$ のとき，線形変換 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ によって円 $x^2+y^2=1$ がどのような図形に写像されるか式と図で示せ．また，それに続けて線形変換 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をほどこすとき，どのような図形に写像されるか式と図で示せ.

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034807)

0.99 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を原点を中心とし半径 2 の円に写像する線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の定数 a , b を求めよ．

(九州芸術工科大 2005)　　(m20054811)

0.100 平面上の直線 l を $l\ :\ y=(\tan\theta)x\ \ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とし，f を平面上の与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$ を求めよ．

(2) 線形写像 f を表す行列を求めよ．

(佐賀大 2005)　　(m20054919)

0.101 平面内に点 P があり，これを $x-y$ 座標系で表示すればその座標値は $(1,1)$ である．いま，$x-y$ 座標系を反時計回りに 75 度回転させたものを $x'-y'$ 座標系とするとき，点 P の座標値を $x'-y'$ 座標系で表示せよ.（ヒント：$75=30+45$）

(佐賀大 2006)　　(m20064945)

0.102 2 つのベクトルを $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．2 次元列ベクトル空間 V^2 から V^2 への線形写像 $y=f(x)$ が $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ を満たすとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ はど

のようなベクトルへ写像されるか $f(\boldsymbol{x})$ の形を行列・ベクトル表示で求めよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074919)

0.103 (1) $x-y$ 平面上の直線 $x+y-1=0$ は次の行列 A で表される 1 次変換によってどのように移されるか. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $x-y$ 平面上のすべての点は次の行列 B で表される 1 次変換によってどのように移されるか.
$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 一般に, 平面上のすべての点は 1 次変換によって平面内の別の点に移される. しかし (2) の場合はそうはならない. この理由を一つ示せ.

(4) 次の行列 C が対角化できない場合の t の値を求めよ. ただし t は実数とする.
$C=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$

(佐賀大 2008)　　(m20084902)

0.104 行列 $A=\begin{bmatrix} 3 & m \\ m & 3 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 f について, 次の問いに答えよ. ただし, $m>0$ とする.

(1) $y=ax+3$ で表される直線 ℓ が 1 次変換 f によってそれ自身に写されるとき, a と m の値を求めよ.

(2) 直線 ℓ 上にあって 1 次変換 f で不変な点を (1) の結果を使って求めよ.

(3) 平面上のすべての点が 1 次変換 f によって原点を通るある直線に写されるとき, m の値を求め, なぜそうなるのかを説明せよ.

(佐賀大 2009)　　(m20094911)

0.105 $\dfrac{(x+y)^2}{18}+\dfrac{(x-y)^2}{8}=1$
で与えられる楕円について, 次の問いに答えよ.

(1) 与式を満足する点の集合を図示せよ.

(2) 与えられた楕円を回転させ, 長軸を x 軸に一致させるために必要な回転行列を求めよ.

(3) 与えられた楕円を半径 1 の円に変換する行列を求めよ.

(佐賀大 2011)　　(m20114909)

0.106 次の問いに答えよ.

(1) 平面上の点の x 軸への正射影となる線形変換 f_A を定める行列 A を示せ.

(2) 原点の周りに $\theta=45^\circ$ 回転する線形変換　f_B を定める行列 B を示せ.

(3) f_A, f_B の順番で変換する合成変換を求め, その変換により直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が移された後の直線を求めよ.

(佐賀大 2013)　　(m20134903)

0.107 2 次元 xy 平面を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x',y')=\big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ.

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.108 xy 平面上の原点回りの回転角 -45°, 60°の 1 次変換を ，それぞれ f, g とする．次の問いに答えよ．

(1) 合成関数 $g \circ f$ の行列を求めよ．

(2) 点 $(1, 1)$ を合成関数 $g \circ f$ で写像した点を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154923)

0.109 次に示す行列

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

による一次変換を考える．次の楕円 C

$C\ :\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

が A による一次変換によって写った先の図形の方程式を求めよ．またその概形を $-4 < x < 4$ の範囲で図示せよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214913)

0.110 平面上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) この変換により点 $(3, 0)$ にうつされる点を求めよ．

(2) この変換により直線 $x - 3y + 2 = 0$ がどのような図形にうつされるかを述べよ．

(大分大 2002)　　(m20025104)

0.111 平面上の線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) この変換は点 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$ をそれぞれ点 $(3,\ -7)$, $(-3,\ 5)$ に移すとする．a, b, c, d を求めなさい．

(2) この変換により，直線 $x + y = 0$ がどのような図形に移されるかを述べなさい．ただし，a, b, c, d は (1) で求めた値とする．

(大分大 2007)　　(m20075101)

0.112 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(2) 1 次変換 f による，正方形 $\{(x, y)\ \mid\ 1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$ の像を座標平面上に図示せよ．

(3) 1 次変換 f による，直線 $x + y = 3$ の像を座標平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215302)

0.113　平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$ において, 次の問に答えなさい.

(1) 原点の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$（直交行列）は次のように与えられる.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ を用いてベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\boldsymbol{Ar}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ. ただし, a, b は実数とする.

(鹿児島大 2005)　　(m20055411)

0.114　座標平面上の点 (x, y) を点 (x', y') に変換する行列 T を求めよ．ただし $x = -2y', y = x'$ とする．

(鹿児島大 2006)　　(m20065410)

0.115　原点 $O(0, 0)$, 点 $A(2, 1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

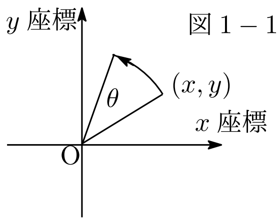
(1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB = \theta$ とした時の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい.

(3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45°回転させた点　C の座標を求めなさい.

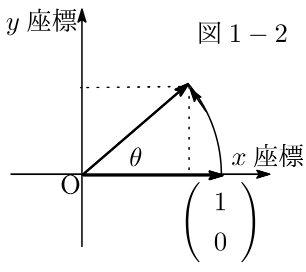
(鹿児島大 2010)　　(m20105409)

0.116　括弧の中を埋めよ．全部で 8 箇所ある.



2 次元平面上の任意の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表す（図 1-1 を参照する事）.

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点 O の周りに角度 θ だけ回転（反時計回りを正とする，図 1-2 を参照）した点は $\begin{pmatrix} [\text{ア}\quad] \\ [\text{イ}\quad] \end{pmatrix}$ となる.



同様に考えると，点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はは $\begin{pmatrix} [\text{ウ}\quad] \\ [\text{エ}\quad] \end{pmatrix}$ に移る.

よって任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の周りに角度 θ だけ回転した点は,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので,

$\begin{pmatrix} [\text{オ}\quad] & [\text{キ}\quad] \\ [\text{カ}\quad] & [\text{ク}\quad] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられる.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085511)

0.117　2 次元直交座標系における任意の点 $P(x, y)$ の座標を変換する行列について，以下の問いに答えよ.

(1) 点 P を x 軸に対称な座標に変換する行列 A を示せ.

(2) 点 P を，原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させる行列 B を示せ.

(3) 点 P を直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に対して対称な座標に変換する行列 C を求めよ.

(室蘭工業大 2021)　　(m20215503)

0.118 2 次元ベクトル空間 R^2 上の線形変換 f は, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ に移し, ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ に移すとする. ただし, t は定数である. このとき, f を表す行列を求めよ. また, その行列が逆行列をもたないような t の値を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055602)

0.119 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，次の設問に答えよ.

(1) AB, BA を計算し，$AB=BA$ が成立しないことを示せ.

(2) 行列 A, B が正則であるかどうかを調べ，正則ならば逆行列を求めよ.

(3) 行列 A と 2 行 2 列の零行列 O に対して．$AX=XA=O$ をみたす O でない行列 X を一つ見つけよ.

(4) 次の条件をみたすような行列 $C=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ を求めよ.

$$C\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad C\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) 点 (x,y) が直線 $x-y=1$ 上を動くとき，$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により定義される点 (X,Y) の軌跡を求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185802)

0.120 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき.

(1) 行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) 逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ.

(3) 平面 $-3x+2y+2z=1$ は，一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって，どのような図形に移るか．その方程式を示せ.

(首都大 2003)　　(m20035901)

0.121 行列 A を $A=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ には $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の関係があった．このときの，x_1 と x_2 を求めなさい．

(首都大 2013)　　(m20135901)

0.122　平面上の点を原点の周りに 45 度回転する線形変換を f とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 線形変換 f の表現行列 A を求めなさい．

(2) $x^2 - y^2 = 1$ を線形変換 f により移した曲線の方程式を求めなさい．

(3) (2) で求めた曲線の概形を描きなさい．

(首都大 2018)　　(m20185903)

0.123　1 次変換 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ による直線 $y = 3x - 2$ の像の方程式を求めよ．

(滋賀県立大 2022)　　(m20226003)

0.124　以下の問に答えよ．

(1) $f : (x, y) \longrightarrow (2x, -x + y)$ において線形変換 f が与えられているとき，f をあらわす行列 A を求めよ．

(2) $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(x) & f'(x) & f''(x) \\ 1 & g(x) & g'(x) & g''(x) \\ 1 & h(x) & h'(x) & h''(x) \\ 1 & k(x) & k'(x) & k''(x) \end{vmatrix}$ について，$\dfrac{dD(x)}{dx}$ を求めよ。

（ただし，$f(x)$ は x の関数，$f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}, f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$，$g(x), h(x), k(x)$ についても同様）

(宇都宮大 2004)　　(m20046102)

0.125　図 1 のように，点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，

各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である．

以下の問に答えよ．

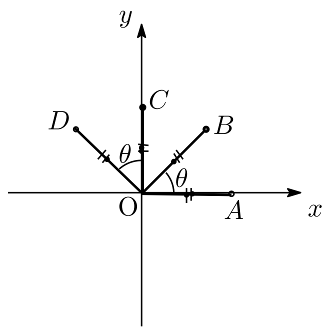


図 1:xy 軸平面

(1) 点 B, D の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.126 座標平面上の点 P を次のような 2 つの条件を満たす点 P' にうつす 1 次変換を考える.

(1) 2 点 $P,\ P'$ を結ぶ線分 PP' を $1:2$ の比に内分する点 Q は直線 $y=2x$ 上にある.

(2) 線分 PP' と直線 $y=2x$ は直交する.

この 1 次変換を表す行列 A を求めよ.

(はこだて未来大 2008)　　(m20086302)

0.127 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は, ${}^t(1,0,0)$ を ${}^t(1,0,-1)$ へ, ${}^t(0,1,1)$ を ${}^t(0,1,0)$ へ, ${}^t(0,1,2)$ を ${}^t(2,1,-2)$ へ, それぞれ移すものとする. ここで ${}^t\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置を表す. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が 1 次従属であることを示せ.

(2) $f(x)=A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in R^3)$ となるような行列 A を求めよ.

(3) (2) で求めた行列 A について, 行列 A の階数を求めよ.

(はこだて未来大 2011)　　(m20116303)

0.128 線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって, 直線 $x+2y=1$ がどのような図形に移されるか, その図形の表す式を求めなさい.

(和歌山大 2007)　　(m20076502)

0.129 原点の回りの $\dfrac{\pi}{3}$ の回転により, 方程式 $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x+2ay+b=0$ が 2 次曲線 $y=x^2-1$ に移される場合, 定数 $a,\ b$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2014)　　(m20146503)