[選択項目] 年度：1991～2023 年　分野：14 線形空間など

0.1 xyz 直交座標空間におけるある一次変換 f が，次のような行列 A で表されるとする．

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & 3 \\ \sqrt{6} & -2 & -\sqrt{6} \\ 3 & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

また，x, y, z 方向を向く単位ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とする．次の各問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 次のベクトル x_1 と x_2 は，1 次変換 f により，どのようなベクトルに移されるか．

$$x_1 = e_1 + e_3, \qquad x_2 = \sqrt{3}e_1 - \sqrt{2}e_2 - \sqrt{3}e_3$$

(3) 次のような 3 つのベクトル ${e_1}', {e_2}', {e_3}'$ を考える．

$${e_1}' = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, \qquad {e_2}' = e_2, \qquad {e_3}' = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}}$$

6 つの内積 ${e_1}' \cdot {e_1}'$, ${e_2}' \cdot {e_2}'$, ${e_3}' \cdot {e_3}'$, ${e_1}' \cdot {e_2}'$, ${e_2}' \cdot {e_3}'$, ${e_3}' \cdot {e_1}'$ の値を求めよ．

(4) 基底のとりかたを e_1, e_2, e_3 から ${e_1}'$, ${e_2}'$, ${e_3}'$ に変えると，1 次変換 f を表す行列は，どのような形になるか．

(5) 1 次変換 f はどのような変換か，明確に述べよ．

(岩手大 1994)　(m19940308)

0.2 $\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0)$ で生成される実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間の正規直交基底を求めよ．

(秋田大 2009)　(m20090407)

0.3 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x, y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \ : \ x \mapsto (x\,,\ \phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005)　　(m20050506)

0.4　４次元数ベクトル空間の部分空間 V と W を

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0,\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 + 5x_4 = 0,\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0\}$$

と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) V と W の次元を求めよ．

(2) $V \cap W$ の次元を求めよ．

(3) $V + W = \{v + w \mid v \in V,\ w \in W\}$ の次元を求めよ．

(東北大 2006)　　(m20060505)

0.5　行列　$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　で $f(v) = Bv$ と定義される線形写像（１次写像）$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ について，像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070502)

0.6　変数 x に関する n 次以下の実数係数多項式の全体を $P_n[x]$ とおくと，$P_n[x]$ は $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ を基底とする実ベクトル空間である．このとき，次に答えよ．

(1) $W = \{p(x) \in P_4[x]\ :\ p(0) = p(1) = 0\}$ の基底を求めよ．

(2) $D(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ によって定義される関数 $D\ :\ P_3[x] \to P_2[x]$ が線形写像であることを示せ．

(3) (2) の関数 D が全射であるか否かについて述べよ．

(4) (2) の関数 D が単射であるか否かについて述べよ．

(東北大 2009)　　(m20090504)

0.7　$\mathbb{R}^4$ における４つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底となることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ の一次結合で表せ．

(東北大 2011)　　(m20110504)

0.8　$n \geq 5$ とし，n 次以下の実多項式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ のなす線形空間を W とし

$$V = \{f(x) \in W \mid f'(1) = f''(1) = 0\}$$

とおく（ V は W の部分空間である ）．V の基底および次元を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110505)

0.9 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す．$\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す．

$\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め，これらを列にもつ行列

$$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ．

(2) A によって定まる線形写像の像を $\mathrm{Im}(A)$ とする．つまり

$\mathrm{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R} \right\}$ である．$\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(A)$ の元であるとき，p を q, r, s で表せ．

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする．

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = 0$ をみたし，4 次行列 $\tilde{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ の行列式が 1 であるとき $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120505)

0.10 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す．$\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す．

以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^N$ のベクトル $v_1, \cdots, v_m$ が一次従属であるとする．このときある v_i は v_j (ただし, $j \neq i$) の一次結合であることを示せ．

(2) V, W は $\boldsymbol{R}^N$ の部分空間で $V \subset W$ をみたすとする．V の任意の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に対し，それをふくむ W の基底が存在することを示せ．

(東北大 2012)　　(m20120506)

0.11 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta = 30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$, $\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30$回転させたベクトルを $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}_1' \ \ \boldsymbol{e}_2')$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160504)

0.12 V を実ベクトル空間とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) n 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in V$ の中に同じものがあれば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は一次従属であることを示せ．

(2) n 個の元の組 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n \in V$ は一次独立とし，$C = (c_{ij})_{ij}$ を n 次実正方行列，$\boldsymbol{a}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{b}_j \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とおく．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることの必要十分条件は C が正則行列であることを示せ．

(東北大 2016)　　(m20160505)

0.13 実数を成分とする 4 次元列ベクトル全体のなす実ベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ で表す．$\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を考える．a_1 と a_2 が生成する部分空間を W_1 とし，a_3 と a_4 が生成する部分空間を W_2 とする．以下の問いに答えよ．

(1) W_1 および W_2 の次元を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の次元を求めよ．

(3) $W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170505)

0.14 標準的内積をもつ 6 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^6$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_6\}$ とし，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_6$ とおく．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ に直交する $\mathbb{R}^6$ のベクトル全体を W とおくとき，W は部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) W の基底を 1 つ与えて，それが基底であることを示せ．

(3) W の直交補空間 $W^{\perp}$ の正規直交基底を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180507)

0.15 t を実数とする．3×4 行列 A を次で定義する． $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & t \\ -2 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(2) 4 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \text{ は実数で } A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元を求めよ．また，W の基底を一組求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190505)

0.16 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は，任意の二つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in V$ と任意の実数 s に対して，和 $\{a_n\} + \{b_n\} \in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\} \in V$ を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad s\{a_n\} = \{sa_n\}$$

と定義することにより，実ベクトル空間となる．V の元 $\{a_n\}$ で，漸化式

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすもの全体のなす，V の部分集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5, a_6 を a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて書き表せ．

(3) $i = 1, 2, 3, 4$ に対して，実数列 $\{e_n^{(i)}\} = \{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & (n = i \text{ のとき}), \\ 0 & (n = 1, 2, 3, 4,\ n \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする．このとき，$\{e_n^{(1)}\}$, $\{e_n^{(2)}\}$, $\{e_n^{(3)}\}$, $\{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ．

(4) 線形写像 $T : W \to W$ を，

$$T(\{a_n\}) = \{b_n\} \quad \text{ただし} \quad b_n = a_{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．このとき，設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ．また，その行列式を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190506)

0.17 n を 1 以上の整数とし，V を n 次元実ベクトル空間とする．S と T を V から V への線形写像とし，I を V から V への恒等写像とする．$S \circ T = I$ が成り立つと仮定する．以下の問いに答えよ．

(1) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とするとき，$\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ も V の基底であることを示せ．

(2) T は全射であることを示せ．

(3) $T \circ S = I$ が成り立つことを示せ．

(東北大 2021)　　(m20210507)

0.18 3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え，V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える．V の二つの元 f, g と実数 s に対して，和 $f + g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると，V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる．V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi : V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める．ただし f' は f の導関数である．以下の問いに答えよ．

(1) V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ．ただし V の基底は $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$，$\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ とし，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(2) 3 次以下の実数係数多項式 f で，

$$f(-1) = 3, \qquad f'(-1) = 2, \qquad f(1) = -1, \qquad f'(1) = 2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ．存在する場合はそのような多項式をすべて求め，存在しない場合はそれを証明せよ．

(東北大 2022)　　(m20220509)

0.19 実 n 次元ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ で表す． $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f， $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像 g は，それぞれ次の行列 A, B で表されるものとする．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f と g の合成写像 $g \circ f$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がうつされる $\mathbf{R}^4$ のベクトルを求めよ．

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす $x \in \mathbf{R}^3$ を求めよ．

(3) g による像空間 $\mathrm{Im}\ g$ の次元を求めよ．ここで $\mathrm{Im}\ g$ は

$$\mathrm{Im}\ g = \{g(x) \in \mathbf{R}^4 \ \mid\ x \in \mathbf{R}^3\}$$

で定義される．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970611)

0.20 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を考える．

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ の中の平面 $x - 3y - 2z = 0$ をパラメーターを使って表せ．

(2) (1) の平面はこの線型写像で何に写されるか．

(3) この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x + 5y = 0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形（すなわち原像）を求めよ．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000615)

0.21 次のベクトルの張る空間の次元を求めよ．

$$(1,1,2),\ (1,2,3),\ (2,3,5),\ (3,5,8)$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030616)

0.22 (1) 線形写像の定義を書きなさい.

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と，f の核 (Ker$f$) と像 (Imf) を求め，それぞれの次元を調べなさい.

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$,　(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ 2y+z-4 \end{pmatrix}$

（注）ただし,線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは，$\mathrm{Ker}F = \{\boldsymbol{v} \in V | F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで，像とは $\mathrm{Im}F = \{F(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである. また，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2007)　(m20070603)

0.23 次の行列で定められる $\mathbb{R}^4$ の線形変換の核と像を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & -7 & -6 \\ -1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(お茶の水女子大 2010)　(m20100604)

0.24 次の行列 A で表される線形写像 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f の核 (Ker f) の基底と次元を答えなさい.

(2) f の像 (Im f) の基底と次元を答えなさい.

（注）ここで, 線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは，$\mathrm{Ker}\, F = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで, 像とは $\mathrm{Im}\, F = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである. また, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2010)　(m20100611)

0.25 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$f : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の各問に答えよ.

(1) f の表現行列 A を求めよ.

(2) A の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2011)　(m20110608)

0.26 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と，f の核 (Ker f) と像 (Im f) を求め，それぞれの次元を調べなさい.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ -3x+2z \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120607)

0.27 (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．S の階数（ランク）$\mathrm{rank}S$ の定義を述べよ．

(2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．このとき，不等式

$$\mathrm{rank}(S+T) \leqq \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(3) 上記問題 (2) で $\mathrm{rank}(S+T) = \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$ が成立するような線形写像 S, T の例をあげよ.

(4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし，S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．　このとき，

$$\mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}S\,, \quad \mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(5) 次の行列で定められる線形写像 $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ．ただし，a は実数である.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

(6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核（核空間）$F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ．またそのときの核の基底を 1 組求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130604)

0.28 ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^4$ 上の一次変換 f を表現する行列を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の問に答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{Im}f$ の次元と基底を求めよ.

(2) f の核 $\mathrm{Ker}f$ の次元と基底を求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130609)

0.29 以下の問いに答えよ.

(1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が線形写像であることの定義を述べよ.

(b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ．

(2) 次の行列 A の固有値と，各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150602)

0.30 以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c を実数とし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| ax + by + cx = 0 \right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ．

(2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3$$

となる自然数 i, j が存在することであることを示せ．

(3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f_A(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3$，で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ．

(4)

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする．線形写像 $f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_B(x) = Bx,\ x \in \mathbb{R}^4$，で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160602)

0.31　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \text{に,}\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} \text{に,}\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{に,}$$

それぞれ写すとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f を表す行列 A を求めよ．

(2) 線形写像 f の核 (Ker f) と像 (Im f) の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170606)

0.32　次の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T(x) = Ax$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 T の像と核それぞれについて，一組の基底と次元を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190606)

0.33　t を実数として，4 つの $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとる．V を $v_1,\ v_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間，V' を $v_1',\ v_2'$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間とする．さらに V と V' の和空間 $V + V'$ が $\mathbb{R}^4$ と異なるとする．

(i) t の値を求めよ．

(ii) $V + V'$ の基底を一組求めよ．

(iii) $V \cap V'$ の基底を一組求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200604)

0.34　次の各問いに答えよ．

(1) V をベクトル和 $+$ とスカラー倍・を持つ係数体 F 上のベクトル空間とする．　これを $(V, +, \cdot)$ と表す．　$W \subset V$ である W に対して $(W, +, \cdot)$ が係数体 F 上の部分ベクトル空間となるための条件を述べよ．

(2) 以下の各集合が数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の標準的な和とスカラー倍に関して部分ベクトル空間となるか否かについて，部分ベクトル空間になる場合にはなることを示し，またならない場合にはその理由を述べよ．

(a) $w_1 = \left\{(x_1, x_2, 0) \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $w_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\right\}$

(c) $w_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1 + x_2 = x_3\right\}$

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200615)

0.35 次の行列 A について, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & a & b \\ -1 & 2 & c & d \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換 f の像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間となるときの a, b, c, d の値を求めよ.

(2) a, b, c, d が (1) の値のときの $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) f を a, b, c, d が (1) の値のときの $\mathbb{R}^4$ の線形変換とし, g を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で, 像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間であるものとする. このとき, g と f との合成写像 $f \circ g$ の像空間の次元のとり得る値の範囲を答え, その範囲のそれぞれの次元となる g の例をあげよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210605)

0.36 $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b - 2c + d \\ a - b - 5c - 2d \end{pmatrix}$ の核 (Ker$f$) と像 (Imf) の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210609)

0.37 以下の問いに答えよ. ただし, 行列はすべて複素行列とする.

(1) X をベクトル空間, U, V, W を X の部分ベクトル空間とする. W が U, V の和集合 $U \cup V$ に含まれるとき, W は U に含まれるか, V に含まれるかのどちらかであることを示せ.

(2) A を 3 次正方行列で, $A^3 = O$, $A^2 \neq O$ となるものとする. ただし, O は零行列とする. A の階数を求めよ.

(3) 次の行列 A を考える. ただし, a は複素数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a & -1 & a - 2 \\ 2a & 2 & 2 - 2a \\ -a & -1 & a - 1 \end{pmatrix}$$

(a) $a = 0$ のとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(b) $a \neq 0$ のとき, A は対角化可能でないことを示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220604)

0.38 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列Aの固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする.
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X) = AX$$

と定義する. φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(東京工業大 1996)　　(m19960804)

0.39 次の行列の階数を求めよ．ただし，x は複素数とする．

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x^2 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ x & x^2+x & x^2 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2001)　　(m20010807)

0.40 (1) 空間 $\boldsymbol{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \boldsymbol{R}^3\}$ 内の平面 $H = \{x+y+z=0\}$ の正規直交基底を一組求めよ.

(2) 写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を，ベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，(1) の平面 H への $\boldsymbol{v}$ の正射影を対応させる線形写像とする．f を与える行列 A を求めよ.

(3) A の固有値をすべて求めよ.

(東京工業大 2007)　　(m20070804)

0.41 (1) a,b を実数とする．$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y-3z \\ 3x+ay+bz \end{pmatrix}$$

は線形写像であることを示せ.

(2) f の像が 2 次元となるとき，a, b はどのような条件をみたすか答えよ.

(東京工業大 2008)　　(m20080804)

0.42 今 $\mathbf{R}^4$ の要素を $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と書くことにする．その二つの部分空間 W_1 , W_2 を次のように定義する．

$W_1 = \left\{X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x+2y+3z+4w=0\ ,\ \ 5x+5z+2w=0\right\}$

$W_2 = \left\{X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 2x-y+z-w=0\ ,\ \ 3x+y+4z+3w=0\right\}$

(1) $\dim\,(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．また，$W_1 \cap W_2$ の一組の基底を求めよ．

(2) (1) で求めた基底を含む $\mathbf{R}^4$ の基底を一組求めよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941004)

0.43 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & 1 & -a & 1 \\ a & -1 & a^2 & -1 \\ -a & 1 & -a^2 & -a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) $\det\,A$ を求めよ.

(2) A^{-1} が存在するための条件を求めよ.

(3) $\operatorname{rank}\,A = 3$ である条件を述べよ.

(4) (3) の条件がなりたつとき A によってきまる線形変換の核の基底を示せ.

(電気通信大 1998)　　(m19981004)

0.44 次の行列 A で決まる $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 核の基底を求めよ．

(2) 像の次元を求めよ．

(3) $\mathbf{R}^4$ をユークリッド内積で内積空間とするとき，核の直交補空間の基底を求めよ．

(電気通信大 1999)　　(m19991003)

0.45 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$, とする．$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ によって生成される $\mathbf{R}^3$ の部分空間を V とし，$\mathbf{a}_3$ と $\mathbf{a}_4$ によって生成されるの部分空間を $W(a)$ とするとき，$V \cap W(a)$ の次元と基底，$V + W(a)$ の次元と基底を求めよ．

(電気通信大 1999)　　(m19991004)

0.46 R^4 内で $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ によって生成される部分空間 $< a_1, a_2, a_3 >$ を V とし，通常のユークリット内積に関する $< a_1 >$ の直交補空間 $< a_1 >^\perp$ を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) $xa_1 + ya_2 \in W$ となるための実数 x, y に対する条件を求めよ．

(2) V の次元 $\dim V$ を求めよ．

(3) $V \cap W$ の次元 $\dim V \cap W$ と $V \cap W$ の基底の 1 つを求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001005)

0.47 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし，線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を，$f(x) = 6x - < v, x > v \quad (x \in \mathbf{R}^3)$ で定義するとき，次の問に答えよ．ただし，$<,>$ は，$\mathbf{R}^3$ の通常のユークリッド内積とする．

(1) $< f(x), v >= 0$ を示せ．

(2) $f(x) = Ax$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元，および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし，$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば，それを 1 つ求めよ．もしそのようなベクトルが存在しないならば，それを証明せよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011008)

0.48 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

について以下の問に答えよ. ただし, $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ はベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{R}^4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を表すものとする.

(1)　部分空間 W_1 , W_2 の基底および次元を求めよ.

(2)　部分空間 $W_1 + W_2$ ， $W_1 \cap W_2$ の基底および次元を求めよ.

(電気通信大 2005)　　(m20051002)

0.49　４次の単位行列を E とし，４次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．さらに λ を実数とし，$W(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = \lambda x\}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1)　$\det(\lambda E - A)$ を求めよ．

(2)　$W(\lambda) \neq \{0\}$ となるような λ をすべて求めよ．

(3)　(2) で求めた各 λ に対し，$W(\lambda)$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2006)　　(m20061003)

0.50　次の３次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　$\det(xE - A) = (x - \lambda_1)^2 (x - \lambda_2)$ と因数分解される．λ_1, λ_2 を求めよ.

(2)　$V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおく．V_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1$ と V_2 の基底 $\boldsymbol{v}_2$ とを求めよ.

(3)　$(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_3$をひとつ求めよ.

(4)　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定めるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ.

(電気通信大 2007)　　(m20071002)

0.51　$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \\ -8 & -14 & -11 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1)　A の行列式 $\det(A)$ と階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2)　A^2 の行列式 $\det(A^2)$ と階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ を求めよ.

(3)　$T_A(x) = Ax$ で定まる写像 $T_A : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元を求めよ.

(4)　$\mathrm{Im}\, T_A$ の基底で，次の条件を満たすものを構成せよ.
（条件）一つめのベクトルだけが T_A の核 $\mathrm{Ker}\, T_A$ に属する.
注 ： $\mathrm{Im}\, T_A = \{T_A(x) \mid x \in \boldsymbol{R}^3\}$,　$\mathrm{Ker}\, T_A = \{x \in \boldsymbol{R}^3 \mid T_A(x) = 0\}$.

(電気通信大 2008)　　(m20081001)

0.52　$V = \mathbb{R}^4$ とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底とする．$f : V \to V$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1, \quad f(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$$

となる線形写像とし，$g : V \to V$ を

$$g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \quad g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \quad g(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1, \quad g(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{v}_4$$

となる線形写像とする．以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ の基底と次元, $\mathrm{Im}\, f$ の基底と次元を求めよ.

(2) 線形写像 $g: V \to V$ の基底 B に関する表現行列 M を求めよ. さらに, 行列式 $\det M$ を求めよ.

(3) g は同型写像である. g の逆写像 g^{-1} の基底 B に関する表現行列 N を求めよ.

(電気通信大 2009)　　(m20091002)

0.53 $\nu = \{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が 3 次元線形空間 V の基底であり, 1 次変換 $f: V \to V$ が

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3\ , \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3\ , \quad f(\boldsymbol{v}_3) = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3\ ,$$

を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) f の基底 ν に関する表現行列 A を求めよ.

(2) 合成写像 $g = f \circ f$ の, 基底 ν に関する表現行列 B を求めよ.

(3) $\mathrm{rank}A$, $\mathrm{rank}B$ を それぞれ求めよ.

(電気通信大 2010)　　(m20101002)

0.54 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし, 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3$$

で定める. ここで, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{a}_i$ の $\mathbb{R}^4$ での標準内積を表す. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$, $f(\boldsymbol{a}_4)$ を求めよ.

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と基底を求めよ.

(3) $\mathrm{Im}(f)$ の次元を求めよ.

(4) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ に関する表現行列を求めよ.

(電気通信大 2011)　　(m20111002)

0.55 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を次の通りとする.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}\ , \quad V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ 4x + y - 2z = 0 \right\}\ .$$

線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x}$ $\quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元とその基底を 1 組求めよ.

(2) V の部分空間 $V \cap \mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ. ただし, $\mathrm{Im}\, f$ は f の像を表す.

(3) V の基底 $\{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\}$ で, $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$ を満たすものを 1 組求めよ.

(電気通信大 2012)　　(m20121002)

0.56 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\ , \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b}$ を計算せよ.

(2) 原点を通り，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式を求めよ.

(3) 次の条件を満たす 3 次正方行列 A を求めよ.

(a) A の対角成分は上から $1, -5, 2$ である.

(b) $\boldsymbol{a}$ は A の固有値 2 に対する固有ベクトルである.

(c) $\boldsymbol{b}$ は A の固有値 -1 に対する固有ベクトルである.

(4) 前問の条件を満たす A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換を考える．k, ℓ を実数とするとき $k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}$ のこの変換による像を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表せ.

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする． A の定める W から W への線形変換の基底 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に関する表現行列を求めよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131001)

0.57　4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため, 掲載を差し控えさせていただきます.

(2) f を部分空間 V に制限して得られる線形写像を

$$g : V \to V\ , \qquad g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

とするとき，g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ.

(3) B の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する B の固有ベクトルを求めよ.

(4) V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する g の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を 1 組求めよ.

(電気通信大 2014)　　(m20141001)

0.58　4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 11 & -9 & 13 & -11 \\ 18 & -16 & 10 & -8 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Im}\, f$ および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker}\, f$ を求めよ.

(2) $\mathrm{Ker}\, f \subset V$ を示せ.

(3) V と $\mathrm{Im}\, f$ の共通部分 $V \cap \mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ.

(電気通信大 2014)　　(m20141002)

0.59 a を実数とし，4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -16 & a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに, 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ を，a の値に応じて場合分けして求めよ．

(2) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, f$ となることを示し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(電気通信大 2015) (m20151001)

0.60 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ を示せ．
ここで，$\mathrm{Ker}\, p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である．

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2015) (m20151002)

0.61 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + z = 4 \right\}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義する．
このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\ f$ の次元を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}\ f$ と P の共通部分 $l = (\mathrm{Im}\ f) \cap P$ は，$\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる．
$\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき，点 H の座標を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x} \in P$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(電気通信大 2016) (m20161001)

0.62 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする $(i = 1, 2)$．

さらに，W を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし，線形写像 $g : W \to W$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (f(\boldsymbol{x}) \in W)$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ．

(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161002)

0.63 p, q を実数とし，3 次正方行列 A，B を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & q \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, f$ に含まれるための x, y, z の条件を求めよ．

(3) $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$ となるような p, q の値を求めよ．ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(x) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, f\}$ とする,．

(電気通信大 2017)　　(m20171002)

0.64 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定義する．線形写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) (2) で定義した線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181001)

0.65 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 λ の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，f の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 M は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および M を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181002)

0.66 a, p, q を実数の定数として，行列 A, B を次で定義する，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ p & q & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$， $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)\ , \qquad g(v) = Bv \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元が最大となる a の値 a_0 を求めよ．さらに，そのときの $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(2) $a = a_0$ のとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $a = a_0$ のとき，$g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ が成り立つような定数 p, q の値を求めよ．
ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(v) \mid v \in \mathrm{Im}\, f\}$ である．

(電気通信大 2019)　　(m20191002)

0.67 a を実数とし，行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & a \end{bmatrix}$ とする．

線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax\ (x \in \mathbb{R}^5)$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ ついて，$\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^4$ となるための a の値を求めよ．

(2) a が (1) で求めた値のとき，f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker} f$ を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) a が (1) で求めた値のとき，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} f$ となる b の条件を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201001)

0.68 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 3y + 6z + 4w \\ -3x + 3y - 8z - 4w \\ 2x + 3y - 3z - 4w \\ -5x + 6y - 15z - 8w \end{bmatrix}$$

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ．

次に，4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $g(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．

(2) g の像 $\mathrm{Im}\, g$ の次元と基底を求めよ．

(3) 共通部分 $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221001)

0.69 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) M の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．
基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

0.70 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とベクトル $\overrightarrow{y_0} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ が与えられている．この時，次の設問に答えよ．

(1) 行列 A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}(A)$ の表す空間図形を求めよ．

(3) $\overrightarrow{y_0}$ が $\mathrm{Ker}(A^T)$ の元と直交することを示せ．

(4) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y_0}$ を満たす $\overrightarrow{x}$ を求めよ．

ここで，A^T は A の転置行列，$\mathrm{Im}(A) = \{A\overrightarrow{x}\ :\ \overrightarrow{x} \in R^3\}$，$\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{x} \in R^3 : A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\}$ を表す．

(千葉大 1999)　　(m19991204)

0.71 (1) X をベクトル空間とする．S, T を X の部分空間とする．このとき，$S \cap T$ が X の部分空間となることを示せ．

(2) X をベクトル空間とする．S, T を X の部分空間とする．このとき，$S \cup T$ は必ずしも X の部分空間とならない．そのような X, S, T の例をあげ，部分空間にならないことを示せ．

(筑波大 2000)　　(m20001310)

0.72 すべての成分が実数の 4 次元ベクトルの全体はベクトル空間となる．この空間を R^4 で表す．このときに

(1) R^4 の元 (x_1, x_2, x_3, x_4) で，$x_1 = 2x_2,\ x_3 = x_4 = 0$ という性質を満たすものの全体 W は R^4 の部分空間となるかを説明せよ．

(2) R^4 の元 (x_1, x_2, x_3, x_4) で，${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1$ という性質を満たすものの全体 W は R^4 の部分空間となるかを説明せよ.

(筑波大 2001)　　(m20011311)

0.73 線形空間 U の 1 次独立なベクトル a_1, a_2, a_3 によって張られる部分空間を V，ベクトル $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$, $a_3 - a_1$ によって張られる部分空間を W とするとき，以下の 2 つの問いに答えよ.

(1) W は V の部分空間であることを示せ.

(2) W の次元を求めよ.

(筑波大 2004)　　(m20041323)

0.74 3 つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．ただし，a 及び b は実数値パラメータとする.

(1) この 3 つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底になるための a と b の条件を求めよ.

(2) この 3 つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の直交基底になるように a と b の値を定めよ.

(3) (2) のとき，ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ をこの 3 つのベクトルの線形結合で表せ.

(筑波大 2006)　　(m20061307)

0.75 集合 $P = \left\{ p(x) \;\middle|\; p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad a, b, c, d \text{ は実数} \right\}$ および $f(p(x)) = p(x-1)$ で定義される写像 $f : P \to P$ について，以下の設問に答えよ

(1) P は 3 次以下の実係数多項式の集合を表す．上記の $p(x)$ を，行列式を展開して x の多項式の形に表せ.

(2) f が線形写像であることを示せ.

(3) 基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(筑波大 2006)　　(m20061315)

0.76 V を複素数体 C 上の n 次元ベクトル空間とする．V 上の線形変換 $f : V \to V$ が $f \circ f = f$ を満たすとき,

$$V = \mathrm{Im}\, f \;\oplus\; \mathrm{Ker}\, f$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ は，それぞれ

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \mid v \in V\}, \quad \mathrm{Ker}\, f = \{v \mid \ \in V,\ f(v) = 0\}$$

で定義される V の部分空間である.

(筑波大 2007)　　(m20071306)

0.77 列ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ を二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ が張る空間に射影することを考える．いま $\boldsymbol{a}_1$ を第一列，$\boldsymbol{a}_2$ を第二列，としてもつ 3 行 2 列の行列を A とする.

(1)　3 次元空間にベクトル $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$ を示す図を描きなさい.

(2)　$\boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)$ の張る平面へ射影する点を $p = A\overline{x}$ ，ここで $\overline{x}$ は $2\times\ 1$ 行列，とする．$\overline{x}$ を求める式が $A^TA\overline{x} = A^T\boldsymbol{b}$ で与えられる理由を説明しなさい．なお A^T は行列 A の転置をあらわす.

(3)　この時射影された点 p の座標を示しなさい.

(4)　この射影を与える $\overline{x}$ の成分 $\overline{x} = (\overline{x}_1\ ,\ \overline{x}_2)^T$ を求めなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081302)

0.78　線形写像 $T\ :\ R^4 \to R^4$ の行列表示を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1)　行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ および T の像 $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ.

(2)　行列 A^2 の階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ および合成写像 $T \circ T$ の像 $\mathrm{Im}(T \circ T)$ を求めよ.

(3)　連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解け.

(筑波大 2008)　　(m20081308)

0.79　線形空間 $\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$，線形空間 $\boldsymbol{W}$ の基底を $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ とする．$\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{W}$ への線形写像 F が下記の関係を満たすとき，これらの基底に関する F の表現行列 M を求めよ．また，F による $\boldsymbol{V}$ の像 $F(\boldsymbol{V})$ の次元を求めよ．なお，$\boldsymbol{o}$ は零ベクトルを表す.

$F(\boldsymbol{a}_1) = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2\ ,\ F(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3\ ,\ F(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = F(\boldsymbol{o})\ ,\ F(\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4) = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3$

(筑波大 2008)　　(m20081310)

0.80　V を有限次元のベクトル空間とし，$f\ :\ V \to V$ を線形変換とする．このとき，$\mathrm{Im}f^n = \mathrm{Im}f^{n+1}$ を満たす $n(\geq 1)$ が存在することを示せ．また，その n について $\mathrm{Ker}f^n = \mathrm{Ker}f^{n+1}$ が成り立つことを示せ．ただし，f^n は f の n 回の合成変換である.

(筑波大 2008)　　(m20081314)

0.81　実数 R を係数とする変数 x に関する高々2 次の多項式の全体を V と表わす.

即ち, $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2\,|\,a_0,\,a_1,\,a_2 \in R\}$. 但し, $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ は, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ のとき, そして, そのときに限り成立すると仮定する. 以下の問いに答えなさい.

(1)　$\beta = \{1, x, x^2\}$ は V の一つの基底なることを示しなさい.

(2)　$f(x) \in V$ に対して, f の x に関する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を対応させる写像を D と表わす. D は V から V への線形写像であることを示しなさい.

(3)　D に対して, 基底 β に関する行列表現を求めなさい. また, D の rank はいくつであるか答えなさい.

(4)　V から R への線形写像全体を V^* と表す. V^* は V と同じ次元を持つ線形空間になることが知られているが, このとき, 以下の条件を満たす $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in V^*$ は V^* の一つの基底になることを示しなさい.

$\alpha_0(1) = 1\ ;\quad \alpha_0(x) = 0\ ;\quad \alpha_0(x^2) = 0\ ;$

$\alpha_1(1) = 0\ ;\quad \alpha_1(x) = 1\ ;\quad \alpha_1(x^2) = 0\ ;$

$\alpha_2(1) = 0\ ;\quad \alpha_2(x) = 0\ ;\quad \alpha_2(x^2) = 1\ ;$

(5) $f(x) \in V$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ を対応させる写像を I と表わす. I は線形写像であることを示しなさい.

(6) I を α_0 , α_1 , α_2 の線形結合で表わしなさい.

(筑波大 2010)　　(m20101316)

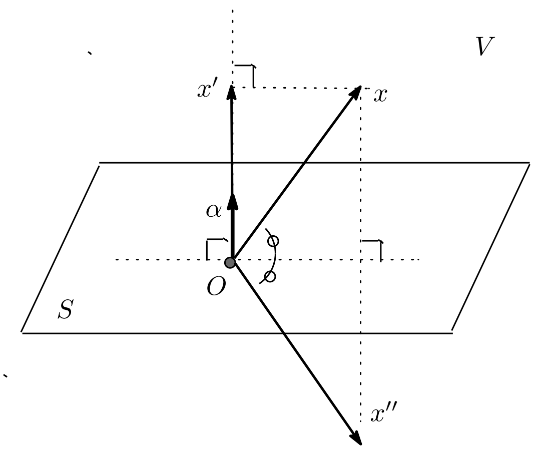
0.82　３次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ と表すこと.

(1) $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ.

(3) (2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ.



(筑波大 2011)　　(m20111304)

0.83　実数を成分とする 2 × 2 行列全体を V として，以下の問題に答えなさい.

(1) 以下のような $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ は V のひとつの基底であることを示しなさい.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) V から V への一次変換 A が以下を満たしているとき，基底 $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ による A の行列表現を求めなさい.

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) A の固有値を全て求めなさい.

(筑波大 2011)　　(m20111311)

0.84 次数が 2 以下の実係数多項式全体で構成される実線形空間 $P_2(R)$ において

内積 $\qquad (f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad (f,g\in P_2(R))$

ノルム $\qquad ||f||=\sqrt{(f,f)}$

を定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=1$ のとき，ノルム $||f||$ を求めよ．

(2) $f(x)=1,\ g(x)=x$ のとき，内積 (f,g) を求めよ．

(3) 基底 $\{1,x,x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を求めよ．

(筑波大 2011) (m20111318)

0.85 2 次実正方行列の全体を $M(2;R)$ とする．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M(2;R)$ と $M(2;R)$ の 2 つの部分集合 $T=\{X\in M(2;R)\ |\ Tr\,X=0\}$，$S=\{Y\in M(2;R)\ |\ {}^tY=Y\}$ について以下を示せ．

ただし; $Tr\,X$ は X のトレース，${}^tY$ は Y の転置行列とする．

(1) $ad-bc\neq 0$ のとき $X\in T$ ならば $AXA^{-1}\in T$ が成り立つ．

(2) $Y\in S$ ならば $AY\,{}^tA\in S$ が成り立つ．

(3) 写像 $\Phi:T\to S$ を $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\in T$ に対して $\Phi(X)=\begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -z \end{pmatrix}$ で定める．
$ad-bc=1$ のとき任意の $X\in T$ に対して

$$\Phi(AXA^{-1})=A\,\Phi(X)\,{}^tA$$

が成り立つ．

(筑波大 2011) (m20111319)

0.86 X,Y,Z を集合とする．写像 $f:X\to Y$ ，$g:Y\to Z$ と合成写像 $g\circ f:X\to Z$ について，以下を示せ．

(1) $g\circ f$ が単射ならば f は単射である．

(2) $g\circ f$ が全射ならば g は全射である．

(3) Y の部分集合 W に対し，W の f による逆像 $f^{-1}(W)$ を

$$f^{-1}(W)=\{x\in X\ |\ f(x)\in W\}$$

と定める．Y の任意の部分集合 A,B について $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ が成り立つ．

(筑波大 2011) (m20111323)

0.87 すべての $i,j=1,\cdots,n$ に対し，第 (i,j) 成分が第 (j,i) 成分に等しい n 次正方行列を n 次対称行列とよぶ．行列 M の転置行列を M^T，また n 次正方行列全体からなる線形空間を $\mathcal{M}^{n\times n}$ で表すものとして，以下の (1)〜(4) を示せ．

(1) 任意の $m\times\ n$ 行列 A に対して $A^T\,A$ は n 次対称行列である．

(2) 任意の n 次正方行列 B に対して B^T+B は対称行列である．

(3) 任意の n 次対称行列 C に対し，$C=B^T+B$ を満たす行列 B が存在する．

(4) n 次対称行列全体の集合は，$\mathcal{M}^{n\times n}$ の部分空間である．

(筑波大 2012) (m20121320)

0.88 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ と 3 次実正方行列 A を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a-b & a & b \\ -a+b & -a+c & -b+c \\ a-b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

により与える．ここに，a, b, c は実数とする．

(1) 零ベクトル $\mathbf{0}$ と異なり，a, b, c によらない 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{w}$ で，a, b, c の値にかかわらず $A\boldsymbol{w} = 0$ を満たすものを 1 つ求めよ．

(2) いま求めたベクトル $\boldsymbol{w}$ に対し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の一組の基底をなすことを示せ．また，$A\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}$ のそれぞれを，これら 3 つのベクトルの 1 次結合で表せ．

(3) a, b, c によらない正則行列 P で $P^{-1}AP$ を上三角行列にするものが存在することを，具体的に P を与え $P^{-1}AP$ を求めることにより示せ．

(筑波大 2012)　　(m20121324)

0.89 V を複素ベクトル空間，ϕ を V の線形変換とし，$a \in \mathbb{C}$ に対して，

$$V_a = \left\{ v \in V \,\middle|\, \phi(v) = av \right\}$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) V_a が部分空間であることを示せ．

(2) a, b, c がすべて互いに異なるなら，

$$(V_a + V_b) \cap V_c = \{0\}$$

となることを示せ．ここで，$V_a + V_b$ は $\left\{ v + u \,\middle|\, v \in V_a\, ,\ u \in V_b \right\}$ を表す．

(筑波大 2013)　　(m20131302)

0.90 自然数から自然数への写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して，集合 X_n , A_n $(n \in \mathbb{N})$ を

$$X_n = \left\{ f(k) \,\middle|\, k \geq n \right\}$$

$$A_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, f(k) = f(n) \right\}$$

で定める．このとき，以下を証明せよ．

(1) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$ である必要十分条件は，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n が無限集合となることである．

(2) $\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, X_n \neq X_{n+1} \right\}$ が有限集合である必要十分条件は，$\left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, A_n \text{が有限集合} \right\}$ が有限集合となることである．

(筑波大 2013)　　(m20131305)

0.91 以下でベクトルは位置ベクトルとし，3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点 (x, y, z) とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とを同一視する．特に原点 $(0, 0, 0)$ はゼロベクトル $\mathbf{0}$ と同一視する．また，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，$A\boldsymbol{x}$ と表せる点全体の集合を H とする．つまり $H = \left\{ A\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \right\}$ である，

(1) H は平面となる．その平面の方程式を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ を示しなさい．

(3) 次の 3 条件を満たす 3 次正方行列 B を求めなさい．

追記： ただし，B はゼロ行列ではないとする．

(a) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{y} \in H$ に対し，$B\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは直交する．
（注：ゼロベクトルは任意のベクトルと直交する.）

(b) $\boldsymbol{y} \in H$ に対し，$B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ である．

(c) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{x}$ なら $B\boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{z}$ である．

(4) A と前問の B に対し，行列 $A + B$ は正則であること（逆行列を持つこと）を示しなさい．

(筑波大 2013)　　(m20131309)

0.92 V を有限次元の実ベクトル空間であるとする．V の空でない部分集合 W が次の条件を満たすとき，W は V の部分空間と呼ばれる．

i. $v_1,\ v_2 \in W$ ならば $v_1 + v_2 \in W$,

ii. $v \in W,\ c \in R$ ならば $cv \in W$.

(1) 次の集合 $W_1,\ W_2$ が R^4 の部分空間かどうか理由とともに述べよ．

(a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ :\ x_1x_2 = x_3x_4 \right\}$

(b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ :\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 \right\}$

(2) 実数を成分とする 2 次正方行列全体の集合 M は，通常の行列の和と行列のスカラー倍に関して実ベクトル空間となる．M の（M 自分以外）部分空間の例を 1 つあげ，それが部分空間になっている理由を述べよ．

(筑波大 2013)　　(m20131313)

0.93 $\boldsymbol{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \ x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$ とし，線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は，$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$,

$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ を満たすとする．

(1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ．

(2) ある実数 $\lambda(\neq 0)$ が存在して，$f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち，$||\boldsymbol{x}|| = 1$ を満たすベクトルをすべて求めよ．

(3) 整数 $n(> 0)$ に対し，線形変換 f^n を，$f^1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),\ f^n(\boldsymbol{x}) = f\big(f^{n-1}(\boldsymbol{x})\big)$ で帰納的に定義する．f^n の標準的な基底に関する行列表現を，直交行列と対角行列を用いて表せ．

(筑波大 2014)　　(m20141302)

0.94 3次元の列ベクトルからなる線形空間を V^3 とし，f を $V^3 \to V^3$ の線形写像とする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ として以下の小問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$，および $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V^3 の基底となることを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1,\ f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2,\ f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3)$ を $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ の線形結合として表せ．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(4) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は $n \geq 1$ の整数である．

(筑波大 2014)　　(m20141308)

0.95 $f : V \to V$ を実ベクトル空間 V の間の線形写像，α を f の実固有値，V_α を α に関する f の固有空間とする．V の部分空間 W_1, W_2 が次の2条件を満たすとする:

(a) $V = W_1 \oplus W_2$

(b) $f(W_1) \subseteq W_1,\quad f(W_2) \subseteq W_2$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $V_\alpha = (V_\alpha \cap W_1) \oplus (V_\alpha \cap W_2)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\dim V_\alpha = 1$ ならば，V_α は W_1 または W_2 の部分空間であることを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141313)

0.96 $f : X \to X$ を集合 X 上の写像とし，写像 $f^n : X \to X$ を，$n \geq 1$ のとき $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}$，$f^0 = \mathrm{id}_X$ (=X 上の恒等写像）で定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) \subseteq \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(2) f が単射ならば，$f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141316)

0.97 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\quad (a, b, c \in \boldsymbol{R})$$

とする．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ が生成するベクトル空間の基底を一組求めなさい．

(2) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ が生成するベクトル空間の次元が3となる a, b, c の条件を求めなさい．

(3) $A = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_4)$ を用いて，1 次写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(x) = Ax \quad (x \in \boldsymbol{R}^3)$$

によって定める，f の核を求めなさい．

(筑波大 2014)　　(m20141319)

0.98 実ベクトル空間 V と線形写像 $F : V \to V$ を考える．

(1) $B = \{v_1,\ v_2\}$ が V の基底ならば $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ も基底であることを証明せよ．

(2) F の基底 B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' はどのような関係にあるか詳しく述べよ．

(3) $\dim V = 2$ とし，$v_1,\ v_2$ を F の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に対応する固有ベクトルとする．

(a) $v_1,\ v_2$ は一次独立であることを示せ．

(b) n を自然数とし，F^n を F を n 回合成した写像とする．F^n の $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151302)

0.99 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x \quad (a_0,\ a_1,\ a_2$ は実定数$)$ の形の実関数全体が作る実線形空間 V に内積 $(g, h) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx\ \ (g, h \in V)$ を導入する．以下の問いに答えよ．

(1) 3 つの関数 $1,\ \cos x,\ \sin x$ は互いに直交することを示し，これらを正規化して正規直交基底を作れ．

(2) 線形変換 $F : f(x) \mapsto f(x + c)$ について，(1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ．ここで，c は実定数である．

(筑波大 2015)　　(m20151308)

0.100 n 次元実数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，内積を標準内積（自然な内積）で定義する．A を n 次直交行列，F を $F(x) = A\boldsymbol{x}$ で定められる $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．なお，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルはすべて列ベクトルとする;

(1) $\boldsymbol{R}^n$ のある正規直交基底を $c_1,\ \cdots,\ c_n$ とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で表すとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{c_i\}$ に関する座標ベクトルは
$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{x},\ c_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{x},\ c_n) \end{bmatrix}$ で与えられることを示せ．

(2) 直交変換の定義を正確に述べよ（同値な定義のどれでもよい）．また，F が直交変換である（直交変換の定義を満たす）ことを示せ．

(3) A の固有値 λ（実数に限らない）の絶対値は 1 であること $(|\lambda| = 1)$ を示せ．

(筑波大 2015)　　(m20151311)

0.101 実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ と $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ に対して実数列 $\{a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \cdots\}$ をその和と定義し，実数 α に対して $\{\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \cdots\}$ を実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ の α 倍と定義すると実数列の全体は実ベクトル空間を成す．このとき (1)〜(4) がこのベクトル空間の部分空間であるかどうかを，理由を示して答えなさい．

(1) ゼロに収束する実数列の全体

(2) 1 に収束する実数列の全体

(3) 有界な実数列の全体

(4) 非有界な実数列の全体

(筑波大 2015)　　(m20151312)

0.102 V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．V は $1, x, x^2, x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている．

さて，線形変換 $T : V \to V$ を

$$(T_p)(x) = (1 - x^2) \frac{d^2 p}{dx^2}(x) - 2x \frac{dp}{dx}(x) + 12 p(x)\ , \quad p \in V$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1) V の基底 $1, x, x^2, x^3$ に対する T の表現行列を求めよ．

(2) $\operatorname{rank} T$ を求めよ．

(3) $\ker T$ を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161302)

0.103 $\mathbb{R}^3$ を 3 次元実ベクトル空間とし，次の 2 つの基底（横ベクトル表示）を考える．

$$E = \{ e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1) \}$$

$$S = \{ s_1 = (1,0,1),\ s_2 = (2,1,2),\ s_3 = (1,2,2) \}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 基底 S から基底 E へ変換する行列 P を求めよ．

(2) $[\boldsymbol{v}]_E$ および $[\boldsymbol{v}]_S$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の基底 E および S による横ベクトル表示とする．
$[\boldsymbol{v}]_E = (1,3,5)$ であるとき，$[\boldsymbol{v}]_S$ を求めよ．

(3) A および B を $3 \times\ 3$ の行列とする．任意の $[\boldsymbol{v}]_E$ に対して $[\boldsymbol{v'}]_E$ が $[\boldsymbol{v'}]_E = [\boldsymbol{v}]_E A$ により決められるとき，$[\boldsymbol{v'}]_S = [\boldsymbol{v}]_S B$ となる行列 B を P, P^{-1} および A を用いて表せ．

(筑波大 2016)　　(m20161309)

0.104 高々2 次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V = \{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R \}$ とする．ただし，R は実数全体の集合であり，x は実数値をとる変数とする．また，多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は，$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) $\{1, 1+x, x+x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ．

(2) 任意の $f,\ g \in V$ に対して $(f,g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$ なる演算を定義する．この演算 (f,g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ．

① 任意の $f, g \in V$ に対して $(f,g) = (g,f)$

② 任意の $f, g, h \in V$ に対して $(f, g+h) = (f,g) + (f,h)$

③ 任意の $f, g \in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f, g) = \lambda (f,g)$

④ 任意の $f \in V$ に対して $(f,f) \geq 0$ で，等号成立は $f(x) = 0$ のときに限る．

(3) (2) で定義した内積 (f,g) のもとで $1, x, 3x^2 - 2$ は直交することを示せ．さらに，$1, x, 3x^2 - 2$ を正規化して V の正規直交基底を 1 組定めよ．

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1, L_2, L_3\}$ とする．線形空間 V から 3 次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1) = c_1,\ \varphi(1+x) = c_2,\ \varphi(x+x^2) = c_3$$

で定めるとき，$\{L_1, L_2, L_3\}$ と $\{c_1, c_2, c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1, c_2, c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする．

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161319)

0.105 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義された線形写像とする．

$$F(x, y, z, w) = (x - y + z + w,\ 2x - 2y + 3z + 4w,\ 3x - 3y + 4z + 5w)$$

すべての $(x, y, x, w) \in \mathbb{R}^4$ に対して．3 次元ベクトル $F(x, y, z, w)$ の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分区間となる．それを $\mathrm{Im}\,(F)$ と表す．また，$F(x, y, z, w) = (0, 0, 0)$ となる 4 次元ベクトル (x, y, z, w) の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間となる．それを $\mathrm{Ker}\,(F)$ と表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Im}\,(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\,(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171307)

0.106 実ベクトル空間 W のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たしているものとする．

(A) $||\boldsymbol{v}_1|| = \cdots = ||\boldsymbol{v}_1|| = 1$

(B) 相異なる $j, k \in \{1, \cdots, n\}$ に対して $\langle \boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{v}_k \rangle = 0$

ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は W の内積，$||\quad||$ はこの内積で定まる長さを表す．　また，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を V とする．以下の (1)-(4) を証明しなさい．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が実数 $x_1,\ \cdots x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$$

と表されるとき，次の等式が成り立つ．

$$||\,\boldsymbol{x}\,||^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$$

(3) V は W の部分空間である．

(4) $V \neq W$ であれば，$\boldsymbol{w} \notin V$ かつ $\boldsymbol{w} \in W$ を満たす任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である．

(筑波大 2017)　　(m20171313)

0.107 a を 0 と異なる実数とし，3 次実正方行列を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ で与える．

(1) A が与える数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で表す．この f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ および 像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を 1 組ずつ求めよ．

(2) $ABA = O$ を満たすすべての 3 次実正方行列 B の中で，階数が最大であるものを 1 つ求めよ．ただし，O は零行列を表す．

(筑波大 2017)　　(m20171314)

0.108 x を 2 次以下の実数係数の多項式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ 全体が作る線形空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ の写像 F は，$f(x)$ を $f(x) + f'(x)$ に移す写像とする．

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数（導関数）を表す．以下の設問に答えよ．

(1) F が上への 1 対 1 の線形写像であることを証明せよ．

(2) $\{x + 1,\ x^2 + x + 1,\ 1\}$ が $\boldsymbol{W}$ の基底となることを証明せよ．

(3) $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{x,\ -x^2 + 1,\ x^2 - 4x + 3\}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底 $\{x + 1,\ x^2 + x + 1,\ 1\}$ に関する F の表現行列 A を求めよ．

(4) A を対角化して，行列 A^n を求めよ．(n は正の整数)

(筑波大 2018)　　(m20181307)

0.109 以下の命題の真偽を判定し，その根拠を述べよ．

(1) 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ であって，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ かつ全射であるものが存在する．

(2) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$U_1,\ U_2$ を V の部分空間とする．$V = U_1 \oplus U_2$ であれば，V の任意の部分空間 W について $W = (W \cap U_1) \oplus (W \cap U_2)$ が成り立つ．

(3) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，W を V の部分空間とする．$W \neq V$ であれば，V の部分空間 U であって，$U \supset W$ かつ $\dim U = \dim W + 1$ を満たすものが存在する．

(筑波大 2018)　　(m20181318)

0.110 線形独立な n 個の m 次元実列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n$（ただし $n < m$）によって張られる m 次元実数空間の部分空間を考え，この部分空間で，零ベクトルでない m 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に最も近いベクトル，すなわち射影 $\boldsymbol{q}$ を求めたい．実係数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{q} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

とおく．さらに，

$$A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$$

となるような $m\times\ n$ 行列 A および n 次元の実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いると，$\boldsymbol{q} = A\boldsymbol{x}$ と書ける．

(1) $\boldsymbol{q}$ から $\boldsymbol{b}$ に向かうベクトルと，$\boldsymbol{a}_i$ (ただし $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) によって張られる部分空間は直交する．この関係を表す式を，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ のみを用いて表しなさい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$ のみを用いて表しなさい．

(筑波大 2019)　　(m20191304)

0.111 2 つの実数 $a,\ \theta$ に対して，3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める．

(1) A^2 の行列式を求めよ．

(2) A^2 の階数を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \right\}$$

で定める．このとき，V の次元を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191314)

0.112　実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を $M_2(\mathbb{R})$ で表す．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$a \neq d$ と仮定する．$M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換 f_A を

$$f_A(X) = AX - XA \quad (X \in M_2(\mathbb{R}))$$

により定める．

(1) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．$f_A(X_1)$, $f_A(X_2)$ は線形独立であることを示せ．

(2) f_A の核の次元が 2 であることを示せ．

(筑波大 2019)　　(m20191315)

0.113　2 つの実数 a, b に対して，実数 $a \vee b$ を

$$a \vee b = \max\{a, b\}$$

で定める．

(1) 実数 a, b に対して，

$$a \vee b = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B に対して，$\mathbb{R}$ の部分集合 $A \vee B$ を

$$A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

で定める．A, B がともに上に有界であれば，$A \vee B$ も上に有界であることを示し，さらに

$$\sup(A \vee B) = (\sup A) \vee (\sup B)$$

が成り立つことを示せ．

(筑波大 2019)　　(m20191318)

0.114　V は $\mathbb{R}$ 上の 3 次元ベクトル空間であるとし，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は V の基底であるとする．線形写像 $f : V \to V$ について

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) &= 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\ f(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) &= \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像の次元を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201314)

0.115 (1) 以下の命題を証明せよ．

(a) V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1)$，$f(\boldsymbol{v}_2)$，$\cdots$，$f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1\cap U_2=U_1\cap U_3=U_2\cap U_3=\{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1+U_2+U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 A, B に対して，$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ に対して，写像 $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ であって合成写像 $g\circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020) (m20201317)

0.116 $a\in\mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とする．$\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\a\\1\end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V=\left\{\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \langle\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v}_i\rangle=0\quad(i=1,2,3)\right\}$$

で定める．また

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-1&-4&-1\\-2&-4&-3\\0&2&1\end{pmatrix}$$

とし，行列 A で定まる線形写像を $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ とする．

(1) A の階数 $\mathrm{rank}\,A$ を求めよ．

(2) $\dim V=2$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，f の像 $\mathrm{Im}\,f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ．

(筑波大 2021) (m20211301)

0.117 U, V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\dim U>\dim V$ とする．また，$f:U\to V$ を線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\,f$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f が単射であることは $\mathrm{Ker}\,f=\{\mathbf{0}_U\}$ と同値であることを示せ．ここで，$\mathbf{0}_U$ は U のゼロベクトルである．

(3) 線形写像 $g:V\to U$ であって，合成写像 $g\circ f$ が同型写像になるものは存在しないことを示せ．

(4) 線形写像 $g:V\to U$ であって，合成写像 $f\circ g$ が同型写像になるものが存在することと，f が全射であることが同値であることを示せ．

(筑波大 2021) (m20211302)

0.118 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ．

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211310)

0.119 m 次実数空間 $\mathbb{R}^m$ 内の互いに直交する線形独立な n 個の列ベクトルを $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ $(\neq \mathbf{0})$ とする．また，これらのベクトルを並べた，$m \times n$ 行列を A と表す．このとき，以下の各問に答えよ．

なお，$\mathbf{0}$ はゼロベクトル，${}^tA$ は行列 A の転置，E は単位行列を表す．

(1) n 次正方行列 ${}^tAA$ が正則であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^m$ 内のベクトル $\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ で張られる空間への正射影を考える． ベクトル $\mathbf{b}$ を射影した点の座標（つまり, $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ で張られる空間内でベクトル $\mathbf{b}$ に最も近い点の座標 ）を $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ とする．$\hat{\mathbf{x}}$ を A と $\mathbf{b}$ により表現せよ．

(3) $A\hat{\mathbf{x}} = \Phi\mathbf{b}$ を満たす射影行列 Φ を A により表現せよ．

(4) $(E - \Phi)$ も射影行列を表している．$(E - \Phi)\mathbf{b}$ は ベクトル $\mathbf{b}$ のどの空間への正射影となるかを説明せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221306)

0.120 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W について答えなさい．

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| \, x^2 - y^2 + 4z^2 + 4xz = 0 \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の二つの部分空間の組合せで表すことができる． それぞれを W_1，W_2 とするとき，W_1, W_2 を求めるとともに，W を W_1, W_2 を使って表しなさい．

(2) W は部分空間かどうかを理由とともに答えなさい．

(筑波大 2022)　　(m20221314)

0.121 複素数列 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ を (a_n) と表す．$V = \Big\{(a_n) \ \Big|\ a_n \in \mathbb{C} \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)\Big\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta \in \mathbb{C}$ とし，

$$W = \Big\{(a_n) \in V \ \Big|\ a_{n+3} = a_n + \beta a_{n+1} - \beta a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)\Big\}$$

とする．また W の元 (x_n), (y_n), (z_n) をそれぞれ

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0$$
$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分空間になることを示せ．

(2) (x_n), (y_n), (z_n) が W の基底になることを示せ．

(3) $F : W \to W$ を

$$F((a_n)) = (b_n), \qquad b_n = a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める．F が線形写像であることを示せ．

(4) W の基底 (x_n), (y_n), (z_n) に関する F の表現行列 A を求めよ．

(5) A が対角化可能でないような $\beta \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ．

(6) $\beta = -1$ のとき $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

(筑波大 2022) (m20221315)

0.122 X を集合とし，f, g, h を X から X への写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f と g が全単射ならば，合成写像 $g \circ f$ は全単射であることを示せ．

(2) $g \circ f$ が全単射ならば，f は単射かつ g は全射であることを示せ．さらに，この命題の逆が成り立たないことを示す反例を 1 つ与え，それが反例であることを示せ．

(3) $f \circ g \circ h$ と $h \circ g \circ f$ が全単射ならば，f, g, h はすべて全単射であることを示せ．

(筑波大 2022) (m20221317)

0.123 A を $m \times n$ の実行列とする．$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数とする一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(i)}$$

を考える．

(1) 方程式 (i) の解全体は，$\mathbf{R}^n$ の線形部分空間をなすことを示せ．

(2) (1) の線形部分空間の次元と，A の階数 (rank A) の関係式を記せ.（証明不要）

(3) B も $m \times n$ の実行列とし，一次方程式

$$B\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(ii)}$$

を考える．$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B < n$ が成り立つとき，方程式 (i) と方程式 (ii) に $\mathbf{o}$ 以外の共有解が存在することを示せ．

（埼玉大 1999） (m19991405)

0.124 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考え，$a_i = f(e_i) \quad (1 \leq i \leq 3)$ とおく．

このとき，次の (1), (2) は互いに同値であることを示せ．

(1) ベクトル a_1, a_2, a_3 は一次独立である.

(2) f は逆写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をもつ.

（埼玉大 2001） (m20011409)

0.125 写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+4y+3z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$ により定義する.

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $(T(\boldsymbol{a}_1),\ T(\boldsymbol{a}_2),\ T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)A$ を満たす 2 行 3 列の行列 A を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061406)

0.126 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\left(T(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3\right)$ を考える.

(1) 写像 T の像 $\mathrm{Im}\, T$ の基底を 1 組求めよ.

(2) 写像 T の核 $\mathrm{Ker}\, T$ の基底を 1 組求めよ.

(埼玉大 2011) (m20111408)

0.127 a, b は実数とし

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & 3 & a+1 \\ a+3 & a+5 & 5 & a+3 \\ b & b+2 & a+1 & 7 \end{pmatrix}$$

とする．写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Ax\ \ (x \in \mathbb{R}^4)$ により定める．このとき，f が全射でないような組 (a, b) をすべて求めよ.

(埼玉大 2013) (m20131409)

0.128 (1) V をベクトル空間とし，W_1 , W_2 をその部分ベクトル空間とする．このとき、$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ は V の部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) 実 4 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトルを

$$a_1 = (1,0,1,2)\ , \quad a_2 = (0,1,1,-2)\ , \quad a_3 = (1,1,0,2)\ , \quad a_4 = (1,1,-1,3)$$

と定める．また，a_1 と a_2 で張られる（生成される）部分ベクトル空間を W_1 とし，a_3 と a_4 で張られる部分ベクトル空間を W_2 とする．このとき，$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ の次元および基底を求めよ.

(茨城大 2006) (m20061706)

0.129 k を実数とし，3 次の正方行列 A, 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -10 \\ -2 & k & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする．以下の各問に答えよ.

(1) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための k についての必要十分条件を求めよ．

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の部分空間 $V = \{A\boldsymbol{u}\,;\,\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^3\}$ が 2 次元となるための k について の必要十分条件を求めよ．また，そのときの V の基底を一組求めよ．

(3) 前問 (2) の k に対し，行列 A の固有値および固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2008)　　(m20081701)

0.130 実数体上のベクトル空間 V 上の一次変換 f に対して，V の部分空間 $\mathrm{Ker}\, f$ を

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \;:\; f(x) = 0\,,\; x \in V\}$$

と定義する．また，$u_1,\, u_2, \cdots, u_h$ を $\mathrm{Ker}\, f$ の基底とし，それに $v_1,\, v_2, \cdots, v_k$ を加え V の基底とする．以下の各問いに答えよ．

(1) $v_1,\, v_2, \cdots, v_k$ が $\mathrm{Ker}\, f$ を法として一次独立である，すなわち

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k \in \mathrm{Ker}\, f \quad \text{ならば} \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

となることを示せ.

(2) $f(v_1)\,,\, f(v_2)\,, \cdots, f(v_k)$ が一次独立であることを示せ.

(3) $f(V) = \{f(x) \;:\; x \in V\}$ とするとき,

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim f(V)$$

となることを示せ.

(茨城大 2009)　　(m20091705)

0.131 実数を成分にもつ n 次列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ で表す. すべての成分が実数である n 次正方行列 A に対して，$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathrm{Ker}A$ と $\mathrm{Im}A$ を次のように定める.

$$\mathrm{Ker}A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}\,, \quad \mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

ただし, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

以下の各行列 A について, $\mathrm{Ker}A$ および $\mathrm{Im}A$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(茨城大 2010)　　(m20101702)

0.132 3 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ.

(1) 一次方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}$ を満たす $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4$ をすべて求めよ.

(2) 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ から 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ への写像 T を

$$T \;:\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$$

で定める．このとき，T は $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像であることを示せ．また，T の核空間の基底を求めよ.

(3) 前問 (2) の写像 T に対し，T の像空間の基底を求めよ．

(茨城大 2011)　　(m20111701)

0.133 X を空でない集合とし，R を X 上の同値関係とする．すなわち，R は直積集合 $X \times X$ の部分集合で，次の (i),(ii),(iii) を満たすとする．

(i) すべての $x \in X$ に対し，$(x,x) \in R$ である．

(ii) $(x,y) \in R$ ならば，$(y,x) \in R$ である．

(iii) $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ ならば，$(x,z) \in R$ である．

また，同値関係 R による $x \in X$ の同値類 $\{y \in X \mid (x,y) \in R\}$ を記号 $[x]$ で表す．

以下の各問に答えよ．

(1) すべての $x \in X$ に対し，$[x] \neq \emptyset$ であることを示せ．ただし．$\emptyset$ は空集合を表す．

(2) 次の命題が成り立つことを示せ．

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow [x] = [y]$$

(3) すべての $x, y \in X$ に対し，$[x] \cap [y] = \emptyset$ または $[x] = [y]$ が成り立つことを示せ．

(茨城大 2011)　　(m20111703)

0.134 f を集合 A から集合 B への写像とし，B の部分集合 C に対して集合 $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$ を $f^{-1}(C)$ で表す，$A, B, C, f^{-1}(C)$ のどれも空集合でないとする．このとき，次の (1) および (2) に答えよ．

(1) $f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$ であることを示せ．

(2) f が全射ならば，$f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ であることを示せ．

(茨城大 2012)　　(m20121703)

0.135 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ への写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ が偶数} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & n \text{ が奇数} \end{cases}$$

と定義する．f による，偶数全体の集合の像と，奇数全体の集合の像を求めて，f が全単射であることを示し，f の逆写像 $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151706)

0.136 k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & k & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

により定める．以下の各問に答えよ．

(1) $k = 1$ のとき，A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $k = 1$ のとき，f は全単射となることを示せ．

(3) f は全単射とならないための k についての条件を求めよ．また，f がこの条件を満たすとき，f の核 $\ker(f)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3\ ;\ f(\boldsymbol{x})=0\}$ と f の像 $\mathrm{Im}(f)=\{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3\}$ の基底を一組求めよ．

(茨城大 2016)　　(m20161701)

0.137 $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f,g を $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して次のように定める；

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\2x_2+5x_3\\x_2-2x_3\end{pmatrix},\quad g(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}x_1-{x_2}^2\\2x_2+5x_3\\x_2-2x_3\end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ．

(1) f が線形写像であることを示し，その表現行列 A を求めよ．

(2) 上で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) 上で求めた行列 A の逆行列を求めよ．

(4) g は線形写像でないことを示せ．

(5) g は全単射であることを示せ．

(茨城大 2018)　　(m20181701)

0.138 R^4 の線形部分空間 V_1 と V_2 を次のように定める．

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in R^4\ :\ \begin{array}{c}2x+z+8w=0\\x+y+z+w=0\end{array}\right\}$$

$$V_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in R^4\ :\ x=-2y-w=-3z+w\right\}$$

以下の各問に答えよ．

(1) 線形空間 V_1 と V_2 の基底をそれぞれ一組求めよ．

(2) 線形空間 $V_1\cap V_2$ の基底を一組求めよ．

(3) $V_1\cup V_2$ が R^4 の線形部分空間ではないことを示せ．

(4) $V_1\cup V_2$ を含む，R^4 の最小の線形部分空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2019)　　(m20191701)

0.139 λ を 0 でない実数とする．4 次実正方行列 A の固有値はすべて重複し λ であるとする．また，

$$W_1=\left\{(A-\lambda E)u\ \middle|\ u\in\mathbb{R}^4\right\}$$
$$W_2=\left\{u\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ (A-\lambda E)u=0\right\}$$

とおく．ただし，E は 4 次の単位行列，0 は零ベクトルを表す．以下の各問に答えよ．

(1) W_1 および W_2 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ．

(2) $\dim W_2=3$ のとき，$W_1\subset W_2$ であることを示せ．

(茨城大 2020)　　(m20201709)

0.140 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底を一組求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ の次元が 2 となる自然数 n を求め，その n について V の基底を一組求めよ．

(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ かつ $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を満たす，一次独立であるベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ の組を決定せよ．

(茨城大 2021)　　(m20211701)

0.141 X, Y が空でない集合で，f は X から Y への写像とする． Y の空でない部分集合で A, B に対し，$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ が成り立つことを示せ．ただし，Y の空でない部分集合 C に対し，$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$ と定める．

(茨城大 2021)　　(m20211704)

0.142 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ および，$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ に対して，

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{V}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0\}$$

とする．以下の各問に答えよ．

(1) $\mathrm{V}(\mathbf{y})$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{V}(\mathbf{a})$ の基底を一組求めよ．

(3) A の固有値および各固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(4) $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] \geqq 0$ であることを示せ．

(茨城大 2022)　　(m20221701)

0.143 ベクトル空間 V, W とその間の線形写像を $f : V \to W$ として, 次の問に答えなさい．

(1) V のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, スカラーを k, ℓ とするとき, f が線形写像である定義式を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および k, ℓ を用いて表しなさい．

(2) V を基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を持つ 2 次元実ベクトル空間, W を基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を持つ 3 次元実ベクトル空間とする．

$f(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3$, $f(\boldsymbol{a}_2) = 3\boldsymbol{b}_1 - 6\boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3$ とすると,

f の像と核は原点を通る直線（1 次元実ベクトル空間）であることを示し, この直線を求めなさい．

(山梨大 2010)　　(m20101802)

0.144 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3)$ を考える． $f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx$ と定義するとき，i, j をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして，次の設問に答えよ．

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x+1\right),\ f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}x-1\right)$ とすると，$(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$, $(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $f_3(x) = ax^2+b \quad (a,\ b$ は定数$)$ とするとき，$(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0,\ (f_3,\ f_3) = 1$ となるような $a,\ b$ を求めよ.

(3) $f_i(-x) = Mf_i(x)$ のように，x を $-x$ と変換する操作を M と書く． M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか，その行列表現を求めよ.

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が，ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする．操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ.

(山梨大 2017)　　(m20171802)

0.145 任意の点 $P(x,y)$ が以下の関数により点 $Q(u,v)$ に写像されるとき，以下の問いに答えよ． ただし，x,y は任意の実数とする.

$$u = \frac{2}{\pi}x$$
$$v = y\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

(1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき，この写像は単射でも全射でもないことを，例を挙げて示せ.

(2) 点 P が $(0,1) \to \left(\dfrac{3\pi}{2},1\right) \to \left(\dfrac{3\pi}{2},3\right) \to (0,3) \to (0,1)$ と移動したとき，点 Q の移動軌跡をグラフに示せ.

(3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は，点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ.

(山梨大 2023)　　(m20231803)

0.146 実数上の n 次元数ベクトル空間 V に自然な内積 $(\bigcirc,\bigcirc)$ が定義されているとする． V の n 個の数ベクトル $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ が

$$(v_i,v_j) = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases}$$

を満たすならば $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ は V の基底となることを証明せよ.

(信州大 1999)　　(m19991906)

0.147 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^4$ の部分空間（すなわち解空間）W の次元を求めよ.

(3) W の基底を求めよ.

(信州大 2008)　　(m20081901)

0.148 以下の行列 A の階数を求めよ．また，連立１次方程式 $Ax=0$ の解空間の次元を求め，解空間の基底を与えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(信州大 2012)　　(m20121901)

0.149 成分がすべて実数である n 次正方行列 A が ${}^tA=A$ を満たすとする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker}\,A\subset\mathbb{R}^n$ を次で定める．

$$\mathrm{Ker}\,A=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\mid A\boldsymbol{v}=0\}$$

また，$(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}\subset\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積についての $\mathrm{Ker}\,A$ の直交補空間とする．

(1) 任意の $\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$ に対して，$A\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$ であることを示せ．

(2) 線形写像 $f:(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}\to(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$ を，$f(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ によって定める．$f(\boldsymbol{v})=0$ を満たす $\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$ は，$\boldsymbol{v}=0$ に限ることを示せ．

(3) f を (2) で定めた線形写像とする．ベクトル $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}\in(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$ が $f(\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{w})$ を満たせば，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$ であることを示せ．

(4) f を (2) で定めた線形写像とする．任意の $\boldsymbol{w}\in(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$ に対して，$f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}$ となるような $\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\,A)^{\perp}$ が存在することを示せ．

(信州大 2018)　　(m20181910)

0.150 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし，$F:V\to V$ を線形写像とする．

(1) $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し，$V(\lambda)=\{x\in V\mid F(x)=\lambda x\}$ は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\cdots,\,\lambda_k$ は相異なる複素数とし，各 i に対し，$V(\lambda_i)$ が 0 でない元 x_i を含むとする．このとき，$x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_k$ は１次独立であることを示せ．

(3) $F^2=F$ であるとき，F は適当な基底を選べば対角行列で表現できることを示せ．また，F の固有値をすべて求めよ．

(信州大 2020)　　(m20201909)

0.151 $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．つまり，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2,\,\cdots,\,\boldsymbol{v}_k\in\mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）．写像 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v}-\langle\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{v}_1\rangle\boldsymbol{v}_1-\langle\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{v}_2\rangle\boldsymbol{v}_2-\cdots-\langle\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{v}_k\rangle\boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v}-\sum_{i=1}^{k}\langle\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{v}_i\rangle\boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ.

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする． $\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）.

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ.

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w})\rangle$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2021)　　(m20211905)

0.152 (1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ の階級 (rank) を計算せよ.

(2) ３次元ユークリッド空間内の集合

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \ \middle|\ x_i \ (i = 1, 2, 3, 4) \text{ は実数} \right\}$$

の概形を描け.

(新潟大 1998)　　(m19982006)

0.153 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -10 & 14 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えよ.

(1) 行の基本変形を行うことにより，A の階数 (rank) を求めよ.

(2) 連立方程式　$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の全体のなすベクトル空間の基底を求めよ.

(新潟大 2001)　　(m20012008)

0.154 A を $n \times\ m$ 実行列，$\mathbf{b}$ を実ベクトルとする．このとき，連立 1 次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{a}$$

と連立 1 次同次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{b}$$

の解について，次の問に答えよ.

(1) 方程式 (a) の解 $\mathbf{x_0}$ と方程式 (b) の解 $\mathbf{x_1}$ の和 $\mathbf{x_0} + \mathbf{x_1}$ は，方程式 (a) の解であることを示せ.

(2) 方程式 (a) の 1 つの解を $\mathbf{x_0}$ とする．方程式 (a) の任意に解は，方程式 (b) の解 $\mathbf{x_1}$ を用いて，$\mathbf{x_0} + \mathbf{x_1}$ と書けることを示せ.

(3) 方程式 (b) の解の全体 W_1 は，m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間になることを示せ.

(4) A の転置行列の列ベクトルによって生成される $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間を W_2 とする．W_2 は (3) で与えられた W_1 の直交補空間であることを示せ.

(新潟大 2003)　　(m20032005)

0.155 空間 (R^3) において，次の各問に答えよ.

(1) ベクトルの組　$\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,　$\vec{b_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ について，$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ は R^3 の基底を作ることを示せ.

(2) R^3 の基本ベクトルを $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ とし，線形変換 $f:\ R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \to R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ の表現行列が $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 5/2 \\ 3/2 & -3/2 & 7/2 \end{bmatrix}$ で与えられるとき，f を $f: R^3(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}) \to R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ なる線形変換と考えたときの表現行列を求めよ．ただし、$R^3(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ は $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ を基底とするベクトル空間 R^3 を意味する.

(新潟大 2006)　　(m20062012)

0.156 (1) $a,\ b$ を複素数とするとき, $A = \dfrac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ はユニタリ行列であることを示せ. ただし, $|a|,\ \bar{a}$ はそれぞれ a の絶対値および複素共役を表す.

(2) $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ のとき，$U^{-1}BU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B について, B^n を求めよ. ただし i は虚数単位である.

(新潟大 2010)　　(m20102012)

0.157 $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ から $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ 2x+y \end{bmatrix}$ への写像は線形写像か調べよ.

(新潟大 2012)　　(m20122006)

0.158 実数を成分とする $3 \times\ 3$ 行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 5 & b \\ c & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

に対して，M により与えられる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + ay + 8z = 0 \\ 2x + 5y + bz = 0 \\ cx + 4y + 18z = 0 \end{cases}$$

がある．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) 上の連立 1 次方程式の解の集合が

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2z = y + 3z = 0\right\}$$

であるとき，a, b, c の値を求めよ.

(2) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して，M は正則でない．その理由を述べよ.

(3) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して，$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する．このとき，$f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ.

(新潟大 2012)　　(m20122017)

0.159 $\boldsymbol{R}^2$ における基底 $\chi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{R}^2$ における標準基底から，基底 χ への取りかえ行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ における線形写像 f の標準基底に関する表現行列を，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，f の基底 χ に関する表現行列を求めよ．

(新潟大 2014)　　(m20142010)

0.160 3 次元空間上のベクトル $\vec{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\vec{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\vec{\mathrm{V}}' = U(\theta)\vec{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ．

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，K^2，K^3，および K^4 を求めよ．さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ．

(4) 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される．ここで，E は単位行列を表し，$X^0 = E$ である．問 (3) の結果を利用して，

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ．

(新潟大 2014)　　(m20142017)

0.161 V_1 と V_2 を 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とし，

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1,\ y \in V_2\}$$

とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $V_1 \cap V_2$ と $V_1 + V_2$ は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間になることを示せ．

(2) $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ で $V_1 \neq V_2$ と仮定する．このとき，$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ を示せ．

(3) V_1 は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とし，

V_2 は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とする．

このとき，$\mathbb{R}^3$ の線形部分空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ．

(新潟大 2016)　　(m20162014)

0.162　4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W_1 を次のように定める.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

このとき，次の各問いに答えよ.

(1) W_1 は $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間になることを示せ.

(2) W_1 の基底を求めよ.

(3) 線形変換 $f\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の像 $\mathrm{Im}(f) = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \right\}$ が W_1 であると仮定する．このとき，f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ.

(4) W_2 は $\mathbb{R}^4$ の 2 次元線形部分空間で，$W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間であると仮定する．このとき，$W_1 = W_2$ となることを示せ.

(新潟大 2017)　　(m20172022)

0.163　3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の平面 L を次のように定める.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y = 0 \right\}$$

線形変換 $f; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ から平面 L への射影とする．すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ について，$f(\boldsymbol{x})$ は平面 L 上にあり，$\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})$ は平面 L に垂直なベクトルとなる．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ を満たす行列 A を求めよ.

(3) f の像空間 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を一組求めよ.

(4) f の核空間 $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底を一組求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192017)

0.164　$\mathbb{R}^m$ を m 次元数ベクトル空間，$\mathbb{R}^n$ を n 次元数ベクトル空間とする．f, g を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 h を

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^m)$$

により定める．このとき，次の各問い答えよ.

(1) h は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像となることを証明せよ.

(2) $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(h)$ をそれぞれ，f, g, h の像空間とする．このとき，

$$\dim(\mathrm{Im}(h)) \leqq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) A, B を実数を成分とする $n \times m$ 行列とする．このとき，

$$\mathrm{rank}(A + B) \leqq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

が成り立つことを証明せよ.

(新潟大 2022)　　(m20222005)

0.165 　V を実ベクトル空間とする．

(1) 　$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の 1 つの基底であることの定義を述べよ．

(2) 　V を 3 次元列ベクトル空間とし，

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく．(1) の定義に基づき，$\{v_1, v_2, v_3\}$ は V の 1 つの基底であることを示せ．

(金沢大 1999)　　(m19992209)

0.166 　4 次元ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^4$ の部分ベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V} = \{(x, y, z, w) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x + y + z + w = 0, \ x + 2y + 2z + 3w = 0\}$$

で定義する.

(1) 　$\boldsymbol{V}$ の基底を一つ求めよ.　　　(2) $\boldsymbol{V}$ の正規直交基底を一つ求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072205)

0.167 　連立方程式 $\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 0 \end{array} \right.$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の全体を V とする.

(1) V は $\boldsymbol{R}^4$ の線形部分空間であることを示せ.　　　(2) V の基底を一つ求めよ.

(3) $\boldsymbol{R}^4$ の基底で，(2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072213)

0.168 　次の 4 × 4 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^4$ について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) 　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ.

(2) 　(1) で求めた a に対して，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(3) 　像空間 $\mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の基底と次元を求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072214)

0.169 　実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し，線形写像 $F : M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}F = \{X \in M \mid F(X) = O\}\ , \quad \mathrm{Im}F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ．ただし，O は零行列を表す．

(金沢大 2007)　　(m20072216)

0.170 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) A の階数（ランク）を求めよ．

(2) ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^4$ の線形変換 f を $f(x) = Ax$ で定める．このとき，f の像の正規直交基底を一組求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082205)

0.171 1 変数 x の実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間 V を考える．

(1) $i = 0, 1, 2$ について，$x^i = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} a_{ij}(1 + jx)^2$ を満たす a_{ij} を求めよ．

(2) $\{1,\ (1 + x)^2,\ (1 + 2x)^2\}$ は V の基底であることを示せ．

(金沢大 2009)　　(m20092205)

0.172 $V = R^3$ を R 上の 3 次元ベクトル空間とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A が定める V 上の線形変換を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in V)$ とする．次の問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V の基底であることを示せ．

(2) V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}f$ は V の部分空間であることを示せ．また，$\mathrm{Im}f$ の基底を一つ求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112205)

0.173 $a_n \neq 0$ を満たす実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots .\ a_n$ に対して

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n \middle| a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = 0 \right\}$$

とおく．次の問い (1)〜(3) に答えよ

(1) V が $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であることを示せ．

(2) V の次元が $n - 1$ であることを，実際にその基底を与えることによって，示せ．

(3) V の直交補空間を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132202)

0.174 線形変換 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

をみたすとする．ただし $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底，即ち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ の次元が 2 とする．

(a) b を a と c で表せ．

(b) f の核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142204)

0.175 R^3 の部分集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\ 3x + 4y - z = 0 \right\}$ と線形変換

$$f : R^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ のとき $f(\boldsymbol{x}) \in W$ となることを示せ．

(3) (2) により，f の定義域を W に制限することにより，線形変換

$$g : W \ni \boldsymbol{x} \quad \longmapsto \quad f(\boldsymbol{x}) \in W$$

ができる．この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152204)

0.176 k を実数とする．R^3 の部分集合

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\ \begin{array}{c} 2x + 10y + 3z = 0, \\ 3x + 15y + kz = 0 \end{array} \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元と基底の 1 組を求めよ．

(3) W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162201)

0.177 連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

を満たす点 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ の全体を V とする.

(1) V は R^4 の線形部分空間であることを示せ.

(2) V の基底を一つ求めよ.

(3) R^4 の基底で, (2) で求めた V の基底を含むものを一つ求めよ.

(金沢大 2016) (m20162225)

0.178 次の $4 \times\ 4$ 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in R^4$ ついて以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 10 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4$ に対する連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つように定数 a を定めよ.

(2) (1) で求めた a に対して, 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(3) 像空間 $\mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^4\}$ の基底と次元を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162226)

0.179 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し, 線形写像 $F : M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき, M の部分空間

$$\mathrm{Ker}\, F = \big\{X \in M \mid F(X) = O\big\}. \qquad \mathrm{Im}\, F = \big\{F(X) \mid X \in M\big\}$$

の次元を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162228)

0.180 写像 $f\ :\ R^3 \to R^3$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

によって定める.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．ただし，

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in R^3 \right\}$$
$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^3 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = 0 \right\}$$

である．

(3) 写像 f は逆写像 f^{-1} を持つか．持つならばそれを求め，持たなければその理由を記せ．

(金沢大 2016)　　(m20162229)

0.181 R^3 の 2 つの部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 2x + y + z = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x - 2y + z = 0 \right\}$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $V \cap W$ の基底を求めよ．

(2) V と W の基底を求めよ．

(3) $V + W$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162231)

0.182 (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を R^3 の標準的な基底とし，R^3 の線形写像 f を次で定義する．

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$$

このとき，標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) R^3 の部分空間 V を $V = \left\{ \boldsymbol{v} \in R^3 \;\middle|\; f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \right\}$ で定義する．V の基底を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162236)

0.183 k を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 2k & 2 \\ k & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A による $\boldsymbol{R}^3$ の変換

$$f : \boldsymbol{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．

(a) f が $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換であることを示せ．

(b) f の像 ($\mathrm{Im}\ f$) の次元が 2 のとき，f の核 ($\mathrm{Ker}\ f$) の次元と基底の 1 組を与えよ．

(金沢大 2017)　　(m20172201)

0.184 (1) 線形写像

$$f : \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -4 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

の像 (Im f) と核 (Ker f) の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; z^2 \geqq x^2 + y^2 \right\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとき, $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1$ も 1 次独立であることを示せ.

(金沢大 2018)　　(m20182201)

0.185 k を実数とする. 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) B の階数 (rank$B$) を求めよ.

(2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と, その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x + y + z = k - 7 \\ -y + z = 3k \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

(3) B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f \ : \ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える. f の核 (Ker f) の次元と 1 組の基底, f の像 (Im f) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ.

(金沢大 2019)　　(m20192205)

0.186 行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

と, B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f \ : \ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) f の核 (Ker f) を求めよ.

(2) f が全射であることを示せ.

(3) E_3 を 3 次の単位行列とする．このとき，

$$BC = E_3$$

を満たす行列 C が存在する場合にはそのような C を一つ与え，存在しない場合にはその理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202202)

0.187 自然数 k に対して V_k を x の k 次以下の実係数多項式全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．n を 2 以上の自然数とし，線形写像 $\varphi : V_n \to V_{n-1}$ と $\psi : V_{n-1} \to V_n$ を，それぞれ，

$$\varphi(v(x)) = v'(x) \quad (v(x) \in V_n), \qquad \psi(w(x)) = \int_0^x w(y)dy \quad (w(x) \in V_{n-1})$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ および $\mathrm{Im}(\varphi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(\psi)$ および $\mathrm{Im}(\psi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi : V_n \to V_n$ と $\varphi \circ \psi : V_{n-1} \to V_{n-1}$ は同型写像かどうか答えよ．同型写像の場合には証明を与え，そうでない場合には理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202209)

0.188 (1) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ．

(2) β を実数とする．$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ．また，そのときの W の 1 組の基底を求めよ．

(3) 写像

$$f : \boldsymbol{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212207)

0.189 次の命題の真偽を判定し，命題が真の場合は証明を与え，命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ．

(1) V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とし，m 個の元 $e_1, \cdots, e_m \in V$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立とする．ベクトル $v \in V$ が $e_1, \cdots, e_m$ の $\boldsymbol{R}$ 上の 1 次結合であるとき，$v = c_1e_1 + \cdots + c_me_m$ を満たす実数の組 $(c_1, \cdots, c_m)$ はただ一通りに定まる．

(2) 2×2 行列 A, B について，$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ が成立する．

(3) $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \boldsymbol{R} \right\}$ に対し，写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ x-2y+1 \end{pmatrix}$$

で定めると，f は線形写像である．

(4) n を任意の自然数とする．正則な $n\times n$ 行列は，固有値 0 を持たない．

(金沢大 2022) (m20222203)

0.190 (1) 線形写像 $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の次元と 1 組の基底，および f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を W とする． 線形写像 $g : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$ であって，$\mathrm{Ker}(g) = W$ となるものを 1 つ求めよ．

(金沢大 2022) (m20222206)

0.191 (,) を $\boldsymbol{R}^3$ 上の標準内積とする．2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ の間の距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})^{1/2}$$

により定める． 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$d\left(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\right) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすような写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換とよぶ．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 2 つの等長変換 f, g に対して，合成写像 $f \circ g$ も $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換となることを示せ．

(2) ベクトル $\mathbf{a_1} \in \boldsymbol{R}^3$ および行列 A_2, A_3 を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}, \quad f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

と定める．このとき f_1, f_2, f_3 は $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換であることを示せ．

(3) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつすような等長変換を，(2) の f_1, f_2, f_3 の合成を繰り返すことにより 1 つ与えよ．

(金沢大 2022) (m20222210)

0.192 集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ を考える. X の部分集合 A に対して, $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$ はつねに成り立つか.

(富山大 2003) (m20032310)

0.193 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ について, 次を示せ.

(1) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射である.

(2) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

(3) f と g が全単射ならば, $g \circ f$ は全単射である.

(富山大 2004)　　(m20042309)

0.194 写像 $f\ :\ R^3 \longrightarrow R^3$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $V = \{\boldsymbol{x} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ とおくとき, V は R^3 の部分空間になることを示せ.

(3) V の次元と 1 つの基底を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042314)

0.195 n 次元ベクトル空間 V について, 次の問いに答えよ. ただし, $n \geqq 3$ とする.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ も 1 次独立であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ によって張られる部分空間と, $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ によって張られる部分空間は一致することを示せ.

(富山大 2005)　　(m20052307)

0.196 $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 V を　$V = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix} \right\}$　で定義するとき, V の次元を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082307)

0.197 U, V, W を実ベクトル空間とし, $f\ :\ U \to V$, $g\ :\ V \to W$ を線形写像とする. 次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $g \circ f\ :\ U \to W$ は線形写像である.

(2) $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,f \subset \mathrm{Ker}\,g$
ただし, $\mathrm{Im}\,f$ は f の像を, $\mathrm{Ker}\,g$ は g の核を表す.

(富山大 2009)　　(m20092309)

0.198 n 次実正方行列全体の集合 $M(n, \boldsymbol{R})$ は, 行列の通常の和とスカラー倍のもとで実ベクトル空間になる. $T_r\ :\ M(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を $A = (a_{ij}) \in M(n, \boldsymbol{R})$ に対して, $T_r(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) T_r は線形写像であることを示せ.

(2) T_r の核 $\mathrm{Ker}(T_r) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \,|\, T_r(A) = 0\}$ は $M(n, \boldsymbol{R})$ の部分空間になることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker}(T_r)$ の次元を求めよ.

(富山大 2010)　　(m20102309)

0.199 A, B を集合，$f : A \to B$，$g : B \to A$ を写像とする．合成写像 $f \circ g$ が全射，$g \circ f$ が単射であるならば．f も g も全単射であることを示せ．

(富山大 2011)　　(m20112302)

0.200 $\mathbf{R}^3$ における 3 つのベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{e}_1$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\boldsymbol{e}_2$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\boldsymbol{e}_3$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像を行列で表せ．

(富山大 2012)　　(m20122307)

0.201 P を 2 以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする．写像 $G : P \to P$ を，

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $(a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R})$ に対し $G(f(x)) = f(x+1) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$

で定義する．

(1) G は線形写像であることを示せ．

(2) P の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する G の表現行列を求めよ．

(富山大 2014)　　(m20142308)

0.202 $\mathbf{R}^2$ をユークリッド平面とする．すなわち，$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)\ \in \mathbf{R}^2$ に対し，その距離を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ で定義したときの距離空間とする．f_1，f_2 : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を連続関数とし，f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，$f(x_1,\ x_2) = (f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))$ $\big((x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}^2\big)$ で定義する．このとき，f が連続写像であることを示せ．

(富山大 2014)　　(m20142309)

0.203 実線形空間 V の部分空間全体からなる集合族を S とする．また．$X_1 \in S$，$X_2 \in S$ として

$$X = \{x_1 + x_2 \mid x_{\in} X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $X \in S$ であることを示せ．

(2) $S_0 = \{Y \in S \mid X_1 \subset Y,\ X_2 \subset Y\}$ とおくとき，

$$X = \{x \in V \mid \text{すべての } Y \in S_0 \text{ に対して } x \in Y\}$$

であることを示せ．

(富山大 2015)　　(m20152301)

0.204 写像 $f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ について，次の問に答えよ．但し $\boldsymbol{R}^\ell$ は ℓ 次元実ベクトル空間を表す．

(1) f が線形写像であることの定義を述べよ．

(2) f が線形写像であるとき次を示せ．

(a) $f(0) = 0$（但し 0 はベクトル空間の原点を表す）

(b) r を任意の自然数とするとき，r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$ $\boldsymbol{a}_r$ $\in \boldsymbol{R}^n$ と
スカラー k_1，k_2，$\cdots$ k_r $\in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r) = k_1 f(\boldsymbol{a}_1) + k_2 f(\boldsymbol{a}_2) + \cdots + k_r f(\boldsymbol{a}_r)$$

(静岡大 2006)　　(m20062507)

0.205 x の 2 次以下の多項式 $f(x)$ の作る線型空間を P_2 とする．P_2 の基底を $\{1, x, x^2\}$ とする時，線型変換

$$T : f(x) \to f(\alpha x + \beta)$$

を表現する行列を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012612)

0.206 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ による $R^2 \longrightarrow R^2$ の線形写像 $A : \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 像 $\mathrm{Im}A$ を示しなさい.

(2) 核 $\mathrm{Ker}A$ を示しなさい.

(3) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(4) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052612)

0.207 列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $(\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b})X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立であることを示せ．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の 1 次結合で表せ．

(4) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル全体のなす集合 $\boldsymbol{R}^2$ の正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ から作れ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062704)

0.208 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ である．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値が $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 5$ であることを示せ．

(2) 固有値 λ_1 に対する固有空間 W_1 の基底と次元を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062705)

0.209 3 次元空間内の原点を O，点 A の位置ベクトルを $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で表す．

点 A を通り，方向ベクトルが $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ $(\neq 0)$ である直線 l が与えられている．

(1) 直線 l を表す方程式を書け．

(2) 空間内に位置ベクトル $p = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点 P が任意に与えられたとき，点 P に最も近い直線 l 上の点を Q とする．点 Q の位置ベクトル $q = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を，$q = Lp + b$ の形で表せ．

ただし，L, b は直線 l だけで定まり，p, q には無関係な行列およびベクトルをそれぞれ表す．

(3) 行列 L の階数を求めよ．

(4) 行列 L のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(名古屋大 2002)　　(m20022802)

0.210 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系) 上の点 $p(x, y, z)$ を，この座標系と原点を共有し，別の直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系) で示した場合，p の座標値は (x', y', z') となった．なお，座標系は右手系とする．

(1) x', y', z' を x, y, z へ変換する行列 M を求めよ．

(2) いま，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系における， ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}$ の正側から見て，$\boldsymbol{k}$ を軸として右回りに $45°$ 回転し，回転後の $\boldsymbol{i}$ の正側から見て，$\boldsymbol{i}$ を軸として右回りに $45°$ 回転した後のベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による座標系を $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系とする．

(a) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系で $p_1(1, 0, 0)$, $p_2(0, 1, 0)$, $p_3(0, 0, 1)$ で示される点の，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系での座標を求めよ．

(b) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系から $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系に変換する行列 M の各要素の値を求めよ．

(c) M の転置行列は M の逆行列と等しくなる． $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系で $p_4(2, 1, 1)$ で示される点の $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系での座標を求めよ．

(名古屋大 2016)　　(m20162805)

0.211 R^3 の 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ は

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

によって定義されている．このとき，次の問に答えよ．

(1) 基底 $A \to B$ の基底変換の行列 P を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の基底 $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき,

$\boldsymbol{\xi}$ の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ に関する座標を求めよ．

(3) 2 組の基底 $A : (\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B : (\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関して,

同じ座標をもつ非零ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122907)

0.212 空間ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ からグラム・シュミットの正規直交化法を用いて，正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を含む R^3 の正規直交基底を 1 組求めよ．

(名古屋工業大 2016)　　(m20162905)

0.213 a, b を定数とするとき，R^4 の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x + 3y + 5z - w = a \\ x - y - 3z + 3w = b \\ 2x - y - 4z + 5w = 0 \end{array} \right\}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) W が R^4 の部分空間となるように a, b の値を定めよ．

(2) a, b が (1) で定めた値のとき，W の次元と基底を求めよ．

(名古屋工業大 2017)　　(m20172904)

0.214 以下の問に答えなさい．

(1) 以下に示す x, y, z に関する方程式を考える．これが $x = y = z = 0$ 以外の解を持つように，定数 k の値を定め，解を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下に示す行列 A により表される線形写像 $f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ を考える． 写像 f の核の次元および正規直交化された基底を求めなさい．なお，写像 f の核は $\left\{\boldsymbol{x} \in R^4 \,\middle|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$（$\boldsymbol{0}$ は R^4 の零ベクトルとする）として定義される．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2014)　　(m20143102)

0.215 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a, b, c を次のように定める．

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) a, b は一次独立であることを示せ．

(2) a, b, c は一次従属であることを示せ．

(3) $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 f で

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在しないことを示せ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023210)

0.216 $\boldsymbol{R}^n$ において定義された実数値関数 F が凸関数であるとは, 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の $\lambda(0 < \lambda < 1)$ とに対し, 次の不等式が成り立つことである.

$$F(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda F(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)F(\boldsymbol{y})$$

特に, A を実対称行列として, $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle$ とおく. ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準内積を表す.

(1)〜(2) に答えよ.

(1) 次の 3 条件は同値であることを示せ.
  (a) $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle$ は凸関数である.
  (b) 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\ A\boldsymbol{y} \rangle \geq 2 \langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y} \rangle$ が成り立つ.
  (c) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ が成り立つ.

(2) A をさらに正定値対称行列とし, 閉領域 D を $D = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid F(\boldsymbol{x}) \leq k\}$ で定義する. ただし, $k > 0$ は定数. このとき D は凸集合であることを証明せよ. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in D$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ とに対して, $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in D$ が成り立つことを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103304)

0.217 $e_1,\ e_2$ を, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとし, 両者がなす角 θ は $0 < \theta < \pi/2$ をみたすものとする. e_1 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_1, e_2 によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を L_2 とし, $\mathbb{R}^n$ から $L_1,\ L_2$ への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ $P_1,\ P_2$ とする. 問 1 〜問 4 に答えよ.

問 1 P_1 の固有値を, 重複度を含めてすべて答えよ. また, 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

問 2 $P_1 + P_2$ の固有値を, 重複度を含めてすべて答えよ. また, 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

問 3 $P_1 - P_2$ は, $\pm\sin\theta$ を固有値としてもつことを示せ.

問 4 $P_1 - P_2$ の固有値 $\sin\theta$ に対応する固有ベクトルを, e_1 とのなす角 α が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき, $\alpha = \pi/4 - \theta/2$ であることを示せ.

(京都大 2018)　　(m20183303)

0.218 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ によって定まる $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を T とおく. すなわち, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である. ただし, $\boldsymbol{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間を表す. (1)〜(4) に答えよ.

(1) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の次元を求めよ.

(2) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の基底を 1 組作れ.

(3) $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ. ただし, $\mathrm{Ker}(T)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であり, 次のように定められる.

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$$

(4) $\mathrm{Ker}(T)$ の基底を 1 組作れ.

(京都大 2019)　　(m20193305)

0.219 行列 A は 3 行 2 列の行列であり, その列ベクトルは $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ である. $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2$ は線形独立であり, これらが張る部分空間を V とする. また, ベクトル $\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}$ はいずれも 3 次元ベクトルであるが, $\boldsymbol{b}$ は大きさと向きが一定で V に含まれていないベクトル, $\boldsymbol{p}$ は V に含まれる任意のベクトル, $\boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{p}$ の差を表すベクトル ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$) である. 行列とベクトルの成分はすべて実数であるとして, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{p}$ は A と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いて $\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{x}$ と表せることを示せ.

(2) $\boldsymbol{q}$ の大きさが最小となるとき, ${}^tA\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ という関係が成り立つことを示せ. なお, ${}^tA$ は A の転置, また, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルを表す.

(3) $\boldsymbol{q}$ の大きさが最小となるときの問い (1) の $\boldsymbol{x}$, およびこのときの $\boldsymbol{p}$ をそれぞれ A と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

(大阪大 2011)　　(m20113504)

0.220 V を n 次元実ベクトル空間とする．以下の問いに答えよ．

(1) V のすべてのベクトルが，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合で表せるならば，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) f を V 上の 1 次変換とする．f が 1 次独立なベクトルの組を 1 次独立なベクトルの組に移すならば，f は同型写像であることを示せ．

（大阪府立大 2001）　　(m20013605)

0.221 有限次元の実ベクトル空間について, つぎの各問いに答えよ.

(1) ベクトル空間の次元の定義を述べよ.

(2) V をベクトル空間, W を V の部分空間とする. V と W の次元が等しいならば, $W = V$ であることを証明せよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103603)

0.222 3 次元実数空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 U が, 実数 a, b を用いて以下のように与えられているとする. このとき, 実数 a, b がどのような条件を満たせば, U は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間になるか.

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, ax_1 + x_2 + x_3 = b \right\}$$

(大阪府立大 2010)　　(m20103606)

0.223 R^4 の部分空間 $W_1,\ W_2$ を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4 \,\middle|\, b + c + d = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4 \,\middle|\, a + b = 0,\ c = 2d \right\}$$

とする. このとき, $W_1,\ W_2$ のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ. また,

$$W_1 \cap W_2\ , \quad W_1 + W_2$$

のそれぞれの次元と一組の基底を求めよ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113604)

0.224 (1) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ のいずれにも直交する単位ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(2) 3 次元実数空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ におけるベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の座標ベクトルを求めよ.

(大阪府立大 2013)　　(m20133608)

0.225 実ベクトル空間 V とそのベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であるとはどういうことか，その定義を述べよ.

(2) $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ が V を生成するとはどういうことか，その定義を述べよ.

(3) $V = R^4$ で

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のとき，$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3,\ \boldsymbol{x}_4,\ \boldsymbol{x}_5$ が V を生成するかどうかを，(2) で述べた定義にしたがって調べよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163604)

0.226 A を n 次の複素正方行列とする．ある自然数 m について，$A^m = O$ が成り立つならば，$A^n = O$ が成り立つことを示そう.

証明は背理法により行う．すなわち，$A^n \neq O$ と仮定して矛盾を導く．$A^n \neq O$ より，ある n 次元複素数ベクトル $\boldsymbol{x}$ をとると，$A^n\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x},\ \cdots,\ A^n\boldsymbol{x}$ は一次独立であることを示せ.

(2) 複素 n 次元数ベクトル空間 C^n の $n+1$ 個のベクトルは必ず一次従属であることを示せ.

(3) 上記の (1), (2) を用いて証明を完成せよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163606)

0.227 線形写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & & +2x_3 & \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +x_4 \\ x_1 & & +2x_3 & +x_4 \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数を成分とする n 次元列ベクトルの全体を表す.

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする．$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$ は 1 次従属であることを示せ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(4) f は全射か単射か示せ.
注意：「全射」は「上への写像」，「単射」は「1 対 1 写像」とも呼ばれる.

(大阪府立大 2018)　　(m20183608)

0.228 $\boldsymbol{R}^3$ 上の 1 次変換 f を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}$$

と定め，$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 W_1 を $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \right\}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ をみたす行列 A を求めよ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f = \left\{ f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \right\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \right\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(4) $W_2 = W_1 \cap (\mathrm{Im}\, f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(大阪府立大 2019)　　(m20193609)

0.229 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に Gram-Schmidt の正規直交化法を用い，正規直交基底を求めよ.

(神戸大 1994)　　(m19943806)

0.230 $\mathbf{R^3}$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$，行列 B を次のように定める.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

φ を基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関して B で表現される $\mathbf{R^3}$ 上の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 基底 $\{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$ に関する φ の表現行列を求めよ.

(2) どの基底に関しても φ が B で表現されているときの a, b, c の値を求めよ.

(神戸大 2003)　　(m20033811)

0.231 ベクトルの組 a, b, c は $\mathbf{R^3}$ の基底であるとする.

$$u = a + b + c$$
$$v = a + b$$
$$w = a$$
$$x = b$$

とベクトル u, v, w, x を定めるとき，次の各問いに答えよ.

(1) ベクトルの組 u, v, w は $\mathbf{R^3}$ の基底であることを示せ.

(2) ベクトルの組 u, v, w, x は $\mathbf{R^3}$ の基底でないことを示せ.

(神戸大 2004)　　(m20043810)

0.232 (1) 次の行列式を因数分解しなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

(2) 次の連立一次方程式の解を全部求めよ. 解全体を解空間と呼ぶ. この解空間の次元はいくらか？

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 2005)　　(m20053801)

0.233 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ を　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　とおく.

T を $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像とし,

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\,,\quad T(\boldsymbol{e}_2) = -2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,,\quad T(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

を満たすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) T を表す行列を求めよ.　　(2) $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ の基底と次元を求めよ.

(神戸大 2007)　　(m20073810)

0.234 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ は, x に関する高々 4 次の多項式で表される. このとき, x^2 の係数を A の成分を用いて表せ. ただし, A の $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ 成分以外の成分は x に無関係な定数とする.

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(2) $\{a,\ b,\ c\}$ を 3 次元ベクトル空間 V の基底とし, f を次のような V の線形変換とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

$$\begin{cases} f(a) = -a - c \\ f(b) = a \\ f(c) = a + b + 2c \end{cases}$$

(a) $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ は V の基底であることを示せ.

(b) V の基底 $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093801)

0.235 線形写像 $T\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ および $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が与えられているとする. このとき, $\begin{bmatrix} T(\boldsymbol{u}_1) & T(\boldsymbol{u}_2) & T(\boldsymbol{u}_3) & T(\boldsymbol{u}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} B$ を満たす $3\times\ 4$ 行列 B が一意に存在する. この B を $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ に関する T の表現行列という. 以下の問いに答えよ.

(1) $3\times\ 4$ 行列 A が与えられ, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき,

$$\begin{bmatrix} T(\boldsymbol{u}_1) & T(\boldsymbol{u}_2) & T(\boldsymbol{u}_3) & T(\boldsymbol{u}_4) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix}$$

を示し, $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{bmatrix}$　$Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$ とおいて, $B = Q^{-1}AP$ を証明せよ.

(2) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093814)

0.236　k を実数として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

とする. $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める.

(1) f の核 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元を求めよ.

(2) f の像 $W = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(神戸大 2011)　　(m20113802)

0.237　線形変換 $T : R^4 \to R^4$ を

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \in R)$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in R^4 \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を 1 組求めよ.

(2) $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in R^4\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ を 1 組求めよ.

(3) (1), (2) で求めた $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立であることを証明せよ.

(神戸大 2011)　　(m20113810)

0.238　R^3 の基底 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) 行列 $[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ.

$T : R^3 \to R^3$ を, 以下で定める線形変換とする：

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$
$$T(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$$
$$T(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3$$

(2) R^3 の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ に対する T の表現行列を書け.

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in R^3\ :\ T(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底の 1 つ B_1 を求め, $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ. ただし, B_1 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ.

(4) T の像 $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x}) \ : \ \boldsymbol{x} \in R^3\}$ の基底の 1 つ B_2 を求め，$\mathrm{Im}(T)$ の次元を求めよ．ただし，B_2 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ．

(5) T の標準基底に対する表現行列を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143801)

0.239 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 L を

$$L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \right\}$$

とおく．次の問に答えよ．

(1) L を含む最小の $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V の基底と次元を求めよ．

(2) V の直交補空間を求めよ．

(神戸大 2015)　　(m20153802)

0.240 自然数 n に対して，次数 n 以下の実数係数 1 変数多項式全体からなる実ベクトル空間 P_n を考え，

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

とおく．以下の各問に答えよ．

(1) $H_0(x)$，$H_1(x)$，$H_2(x)$ を具体的に求めよ．

(2) $H_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ．

(3) $H_0(x)$，$H_1(x)$，$\cdots$，$H_n(x)$ が P_n の基底をなすことを示せ．

(4) $0 \leqq m < n$ を満たす任意の整数 m について，次の式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = 0$$

(神戸大 2016)　　(m20163807)

0.241 X, Y を集合とし，$f \ : \ X \to Y$ を写像とする．A_i，A で X の任意の部分集合を，B で Y の任意の部分集合を表すとき，次の主張（命題）のそれぞれについて，正しければ証明をし，正しくなければ反例を挙げよ．

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(3) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

ここで $f(A)$ は A の f による像を，$f^{-1}(B)$ は B の f による逆像を表す:

$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} \ , \qquad f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$

(神戸大 2017)　　(m20173806)

0.242 a を実数とする．自然数 n に対して，対角成分が全て a であり，それ以外の成分が全て 1 である n 次正方行列を A_n とする．以下の各問いに答えよ

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

(1) $|A_n| = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$ であることを示せ．ただし $0^0 = 1$ とする．

(2) $a = 1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(3) $a = -n+1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173807)

0.243 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とする．また，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし，この基底についての表現行列が A である $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像を T とする．以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ と像 $\mathrm{Im}(T)$ の基底をそれぞれ求めよ．なお，基底を構成するベクトルは $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すこと．

(4) n を自然数とするとき，T の n 回の合成を T^n で表す．$T^n(\boldsymbol{a}_1)$, $T^n(\boldsymbol{a}_2)$, $T^n(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ．

(神戸大 2017)　　(m20173808)

0.244 $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \in \mathbb{R}^3$ と $W_1,\ W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \langle \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \rangle,\ W_2 = \langle \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4 \rangle$$

ただし，$\langle \boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j \rangle$ は $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_j$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間を表す．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 $A = [\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$ の 1 組の基底と次元を求めよ．

(3) 3 次正方行列 B で，$B\boldsymbol{u}_3 = 0$ ，かつ，すべての $\boldsymbol{u} \in W_1$ に対して $B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ となるものを求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193801)

0.245 実 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ について，次の問いに答えよ．

(1) 4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $\mathbb{R}^4$ の基底を成すか判定せよ．

(2) 0 でない実数 a, b, c, d に対し，4 つのベクトルの組

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

が生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間の次元を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213802)

0.246 E を 3 次の単位行列，J をすべての成分が 1 であるような 3 次の正方行列とし，

$$A = \frac{1}{3}J\ , \qquad B = E - A$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A^2, B^2, AB をそれぞれ求めよ．

(2) $V = \left\{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^3 \right\}$ ，$U = \left\{ Bx \mid x \in \mathbb{R}^3 \right\}$ とおくとき，$\mathbb{R}^3 = V \oplus U$（直和）であることを示せ．

(神戸大 2022)　　(m20223801)

0.247 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の 3 つの列ベクトルが生成する $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間の次元を求めよ．

(2) 連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつための a, b, c に関する条件を求めよ．

(3) 行列 A の固有値および固有空間をすべて求めよ．

(岡山大 2008)　　(m20084004)

0.248 (1) $M_2(C)$ を複素数を成分とする 2 × 2 行列全体の集合とする，$M_2(C)$ は行列の足し算とスカラー倍により複素ベクトル空間になる．$M_2(C)$ の次元を求めよ．

(2) $A \in M_2(C)$ に対して写像 $f_A : M_2(C) \to M_2(C)$ を $f_A(X) = AX - XA$ で定める．このとき，f_A が線形写像になることを示せ．

(3) f_A の核の次元を求めよ．

(岡山大 2011)　　(m20114004)

0.249 2 次正方実行列 A であって ${}^tA = A$ を満たす行列全体からなる実ベクトル空間を V とする．ここで，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(1) V は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を基底として持つことを示せ．

(2) V の元 A に対して

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 f は，V 上の線形変換であることを示せ．また，f の階数を求めよ．

(岡山大 2012)　　(m20124004)

0.250 3 次元実ベクトルが空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a}$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $f(\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}$ を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の固有多項式を求めよ.

(2) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}\}$ は : $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(3) W の次元を求めよ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ が, 無限個の自然数 n に対して不等式

$$||f^n(\boldsymbol{x})|| < 2^n||\boldsymbol{x}||$$

を満たすための実数 x, y, z の条件を求めよ. ただし f^n は合成変換 $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}$ を表し,

$||\cdot||$ はベクトルの長さを表すものとする.

(岡山大 2014)　　(m20144003)

0.251 $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定める. ただし, A は次で与えられる行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(2) 写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を一組求めよ.

(3) 写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ.

(4) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ であるか判定せよ.

(岡山大 2015)　　(m20154003)

0.252 $t \in \mathbb{R}$ に対して, 3 次正方行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) A の行列 $\det A$ を t の多項式で表し, かつ, $\det A = 0$ となる t を求めよ.

(2) $\mathrm{rank}(A)$ を t の値で場合分けして求めよ.

(3) 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ を次のようにとる.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

そして, 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a} \rangle\, \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b} \rangle\, \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c} \rangle\, \boldsymbol{c}\,, \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

と定める. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3,)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3,) \in \mathbb{R}^3$ に対して
$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上の標準内積である.
$\mathrm{rank}(f)$ を t の値で場合分けして求めよ.

(岡山大 2016)　　(m20164004)

0.253 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ と定める．次に答えよ．

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) V の正規直交基底を一組求めよ．

(3) 写像 $f : V \to V$ を $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$ と定める．f が線形写像になることを示せ．

(4) (2) で求めた V の一組の基底を e_1, e_2 とする．$f(e_1)$ と $f(e_2)$ をそれぞれ，e_1, e_2 を用いて表せ．

(広島大 2003)　　(m20034109)

0.254 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ と $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を写像とする．このとき，次の命題について正しいときは証明を与え，正しくないときは反例を与えよ．

(1) g と合成写像 $g \circ f$ が線形写像で g が単射ならば，f は線形写像である．

(2) f と合成写像 $f \circ g$ が線形写像ならば，g は線形写像である．

(広島大 2003)　　(m20034110)

0.255 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$ の次元と, 像空間 $W = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054104)

0.256 $n \times\ n$ 複素行列に対し,

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

を証明せよ. ただし, $A^\dagger = ({}^tA)^*$（A の転置かつ複素共役）である.

(広島大 2005)　　(m20054108)

0.257 $\mathbb{R}^n$ に属する m 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$「 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

(1) 命題 $(*)$ の否定命題を述べよ．

(2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) A は相異なる実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{0}\ (j=1,2,3)$ は λ_j に対応する固有ベクトルとする．このとき，$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(広島大 2006) (m20064102)

0.258 実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする．また，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線形写像 $f\ :\ V \to V$ を $f(X) = AX - XA \quad (X \in V)$ で定義する．

(1) 線形写像 f に関して，

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値を求めよ．

(2) 線形写像 f に関して，X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^tX$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ．

(3) 線形写像 f に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ．

(広島大 2008) (m20084105)

0.259 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,,$$

とおく．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\,C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ．

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f\ :\ V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)\ \ (X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009) (m20094104)

0.260 次の行列 A が定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を一組求めよ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を一組求めよ．

(3) f を $\mathrm{Im}\, f$ に制限して得られる線形変換 $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ について, (2) で求めた基底に関する行列表示を求めよ.

(4) A の固有値をすべて求めよ.

(広島大 2011)　　(m20114106)

0.261 標準内積の入った線形空間 $\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1, ベクトル $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 部分空間 $W_1 + W_2$ の直交補空間の次元を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ.

(3) W_1 の直交補空間を $W_1^{\perp}$ とする. ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

の直和分解 $\mathbb{R}^4 = W_1 \bigoplus W_1^{\perp}$ に伴う分解を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \quad \left(\boldsymbol{y} \in W_1\, ,\ \boldsymbol{z} \in W_1^{\perp}\right)$$

とし, ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ と表す. 実数 a, b を x_1, x_2, x_3, x_4 を用いて表せ.

(広島大 2011)　　(m20114107)

0.262 V を 3 次元実線形空間, W をその 2 次元部分空間とする. f は V の線形変換で, $f(W) \subset W$ を満たすとする. また, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は W の基底, $\boldsymbol{v}_3 \in V$ は W に属さないベクトルとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を A とし, A の $(3,3)$ 成分を a とする. このとき, V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して, $f(\boldsymbol{v}) - a\boldsymbol{v} \in W$ であることを示せ.

(3) a は A の固有値であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{v} \notin W$ ならば, $f(\boldsymbol{v}) \neq a\boldsymbol{v}$ であるとする. このとき, A の固有多項式を $\Phi(t)$ とすれば, $\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ であることを示せ. ただし, $\Phi'(t)$ は $\Phi(t)$ の導関数である.

(広島大 2012)　　(m20124104)

0.263 標準内積の入った実線形空間 $\mathbb{R}^4$ における, 次の 4 点を考える.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ の原点を O と書く．線形変換 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ は

$$T(P_1)=P_2\,,\ T(P_2)=P_3\,,\ T(P_3)=P_4\,,\ T(P_4)=P_1$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP_1},\ \overrightarrow{OP_2},\ \overrightarrow{OP_3},\ \overrightarrow{OP_4}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する T の表現行列 A を求めよ.

(3) T の固有多項式およびすべての実固有値を求めよ.

(4) 原点 O と $P_1,\ P_2$ を含む 2 次元部分線形空間を W とする．W 上の点 Q で P_3 との距離が最小となるものを求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134107)

0.264 実 n 次正方行列 A について，$A^2=-E$ が成り立っているとする．ただし，E は単位行列である．また，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ により定める．$\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを $\boldsymbol{o}$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) A は実固有値をもたないことを示せ.

(2) n は偶数であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\,,\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$ のとき，$\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v}$ は 1 次独立であることを示せ.

(4) $n=2$ とし，$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\,,\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$ とする．このとき，$\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v}\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

(5) $n=4,\ \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4\,,\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$ とし，$\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ で張られる部分線形空間を M とする．さらに $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^4\,,$ $\boldsymbol{w}\notin M$ とする．このとき，$\{\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ A\boldsymbol{w}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底になることを示し，この基底に関する f の表現行列 C を求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134109)

0.265 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表す．一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して，写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を次のように定義する．

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 写像 T は線形写像であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．$\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと.

(3) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し，$\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{x},\ T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき，写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144107)

0.266 実数列 $\{a_n\}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}{a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ.

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ.

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ.

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである.

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.267　$a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．以下の問いに答えよ.

(1) f の像および核の次元を求めよ.

(2) $a = 0$ のとき，f の逆写像に対応する行列を求めよ.

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(広島大 2015)　　(m20154103)

0.268　A は実 $n \times\ k$ 行列でその階数は $\operatorname{rank} A = k < n$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) ${}^tAA$ が対称行列であることを示せ.

(2) ${}^tAA$ が正定数かつ正則であることを示せ.

(3) ${}^tAA$ の逆行列が対称行列であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{b}$ は実 n 次元列ベクトルとし，実 k 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) =^t (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

を定める．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big)({}^tAA)\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big) + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} - {}^t\boldsymbol{b}A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}$$

であることを示し，$f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(広島大 2016)　　(m20164103)

0.269　実行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする．ただし，$a_n,\ b_n,\ c_n$ は実数である．このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ．ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{||\boldsymbol{v}_n||\}$ が有界であることと定義する．

(4) $W = \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \{A^n\boldsymbol{w} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\} \text{ は有界}\right\}$ とおく．W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164105)

0.270 a, b を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(2) g の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184101)

0.271 2 次以下の実数係数多項式全体からなる線形空間 V において，

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (f, g \in V)$$

により内積を定義する．ことのき，グラム_シュミットの直交化により，V の基底 $\{1, x, x^2\}$ から正規直交基底を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084204)

0.272 V を n 次元の線形空間とし f は V から V への線形写像とする．

(1) $f(0) = 0$ を示せ．

(2) $X = \{x\ ;\ x \in V\ ,\ f(x) = 0\}$ は V の線形部分空間であることを示せ．

(3) $\{e_1,\ e_2,\ \cdots\ ,\ e_n\}$ を V の基底とする．$f(x) = 0\ (x \in V)$ なら $x = 0$ となるとき $\{f(e_1),\ f(e_2),\ \cdots\ ,\ f(e_n)\}$ は一次独立であることを示せ．

(徳島大 2009)　　(m20094401)

0.273 V を線形空間とし, $f : V \longrightarrow V$ を線形写像とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ 及び $\mathrm{Im}\, f = \{w \in V \mid w = f(v)\ ,\ v \in V\}$ はともに V の部分線形空間であることを示せ.

(2) $f \circ f = f$ ならば, $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\,(1_V - f)$ が成り立つことを示せ.
ここで，$\mathrm{Im}\,(1_V - f) = \{w \in V \mid w = v - f(v)\ ,\ v \in V\}$ とする．

(3) V が有限次元線形空間とする. このとき, $f \circ f = f$ であるための必要十分条件は $\dim \mathrm{Im}(1_V - f) = \dim \mathrm{Ker}\, f$ であることを示せ.

(高知大 2005)　　(m20054505)

0.274 実数を成分とする $2\times\ 2$ 行列全体の集合を V とする．さらに V から $\boldsymbol{R}$ への写像 f_1 と f_2 を次のように定義する．V の元 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M)=ad-bc \qquad\qquad f_2(M)=a+d$$

このとき，f_1 と f_2 が線形写像であるか否かを調べよ．線形写像である場合には，その核の一組の基底を求めよ．ただし，V と $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}$ 上の自然なベクトル空間とし，線形写像の核が V の部分空間になることは証明しなくてもよい．

(高知大 2006)　　(m20064504)

0.275 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$ は行列の和，行列の実数倍をそれぞれ，線形和，スカラー倍とみなすと実ベクトル空間になる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathrm{tr}: M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ を $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=a+d$ で定義するとき，tr は線形写像であることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker\ tr}=\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid \mathrm{tr}(A)=0\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(4) Ker tr の次元を求めよ.

(高知大 2007)　　(m20074505)

0.276 $\boldsymbol{V}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元の実ベクトル空間とし，$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の部分空間とする．任意の $x\in\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{W}^{\perp}$ ($\boldsymbol{W}^{\perp}$は $\boldsymbol{W}$ の直交補空間) を用いて $x=w+w'$ ($w\in\boldsymbol{W}$, $w'\in\boldsymbol{W}^{\perp}$) と一意に表すことができる．$x$ に対してこの w を対応させる $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{V}$ への写像を f と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x_1,x_2\in\boldsymbol{V}$, $\alpha_1,\alpha_2\in\boldsymbol{R}$ に対して,

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f\circ f=f$ が成り立つことを示せ．ただし，$f\circ f$ は f と f の合成写像である.

(3) 任意の $x,y\in\boldsymbol{V}$ に対して，$\langle\ f(x),y\ \rangle=\langle\ x,f(y)\ \rangle$ が成り立つことを示せ.

(高知大 2008)　　(m20084504)

0.277 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f は，$\boldsymbol{R}^2$ の元 $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{R}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$f(\boldsymbol{u}_1)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\,,\quad f(\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3$$

を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(3) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 B を求めよ．また，B と (2) における行列 A との関係を述べよ．

(高知大 2009)　　(m20094503)

0.278 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とする. P の元 $f(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ と $g(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ に対して加法 $f + g$ と定数倍 λf を次のように定義する.

① $(f + g)(x) = (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

② $(\lambda f)(x) = \lambda b_2x^2 + \lambda b_1x + \lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi : P \to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x) = xf'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104503) ,

0.279 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{e}_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{e}_k$ となっている．ただし，$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか，成分表示せよ.

(2) $f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3),\ f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_4$ とするとき．f の表現行列 A を求めよ.

(4) A は正則であることを示せ.

(5) f の逆写像はあるか．あれば求め，無ければその理由を述べよ.

(高知大 2011)　　(m20114504)

0.280 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{R})$ とおく．$M_n(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている．$M_n(\mathbb{R})$ の元 A に対し，

$$L(A) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $L(A)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.

(2) $L(A)$ は行列の積について閉じていること，つまり任意の $B, C \in L(A)$ に対し，$BC \in L(A)$ となることを示せ．

(3) $n = 2$ として，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合にベクトル空間 $L(A)$ の基底を 1 組求め，$L(A)$ の次元を答えよ．

(高知大 2014)　　(m20144504)

0.281 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく．$M_2(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている．写像 $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$f(A) = {}^tA \quad \bigl(a \in M_2(\mathbb{R})\bigr)$$

で定める．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f は一次写像であることを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ．

(3) (2) の基底に関する f の表現行列を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154504)

0.282 a, b, c は実数であるとする．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$．$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A^{-1} を求めよ．

(2) $B = AJA^{-1}$ とおく．B を求めよ．

(3) (2) の B によって定まる線形写像を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と書く．このとき $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ はそれぞれ f の像と f の核を表すものとする．

(4) (3) の線形写像 f に対して，$\mathrm{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164504)

0.283 実ベクトル空間 V, W の間の一次写像 $f : V \to W$ について次の問いに答えよ．

(1) f の核を $\mathrm{Ker}\ f$ とおき，V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$ とおく．f が単射であることの必要十分条件は $\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}_V\}$ であることを示せ．

(2) f が単射で，V の k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であるならば，これらの f による像 $f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_k)$ も一次独立であることを示せ．

(3) 実ベクトル空間としての V, W の次元をそれぞれ m, n とおく．f が単射であるならば，$m \leqq n$ であることを示せ．

(高知大 2017)　　(m20174504)

0.284 3 次の実正方行列 A が $A^2 - 5A = O$ (O は 3 次の零行列) をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$A\boldsymbol{v}$ は A の 5− 固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x}\}$ の元であることを示せ．

(2) 任意の $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$(A - 5E)\boldsymbol{w}$ は A の 0− 固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ の元であることを示せ．ただし，E は 3 次の単位行列とする．

(3) $\mathbb{R}^3$ は A の $0-$固有空間と $5-$固有空間の直和であることを示せ.

(4) 題意をみたすような A で．E の実数倍とは異なるものの例を一つあげよ.

(高知大 2018)　　(m20184504)

0.285 3 次の正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

で与えられているとし，A を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への一次写像とみなす．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) A の像 $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ.

(3) A の転置行列 ${}^tA$ の核 $\mathrm{Ker}({}^tA)$ を求めよ.

(4) $\mathrm{Ker}({}^tA)$ の元は $\mathrm{Image}(A)$ の元と $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関して直交することを示せ.

(高知大 2019)　　(m20194504)

0.286 (1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次独立なベクトルであるとき　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，　$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，　$\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}$　は 1 次独立か？

(2) 次式で定義される W, U は $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間か？
部分ベクトル空間であれば次元と基底を求め，そうでないときはその理由を述べよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \quad \middle| \quad x + 2y - z = 0 \right\},\ U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \quad \middle| \quad x + y = 0,\ z = 1 \right\}$$

(愛媛大 2006)　　(m20064612)

0.287 E を 3 次単位行列とする．3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$　および　$B = E + A$ について，

次の問に答えよ.

(1) $B^2 \neq O$ であるが $B^3 = O$ であることを示せ.

(2) 3 次元数ベクトル $\boldsymbol{u}$ で，$B^2\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であるものを一つ選べ.

(3) (2) で選んだベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{u},\ B\boldsymbol{u},\ B^2\boldsymbol{u}$ は 1 次独立であること，従って，ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底をなすことを示せ.

(4) 線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

の (3) の基底 $\{\boldsymbol{u},\ B\boldsymbol{u},\ B^2\boldsymbol{u}\}$ に関する表現行列を求めよ.

(愛媛大 2006)　　(m20064614)

0.288 x を実数とする．3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が 1 次従属であるとき, x の値を求めよ.

(3) $x=5$ のとき, ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(愛媛大 2016) (m20164601)

0.289 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & x & y & 0 \\ 2 & 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ y \\ x \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

ただし, x, y は実数とする.

(1) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が 1 次従属になるとき, x, y の値を求めよ.

(2) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ が 1 次従属になるとき, y を x で表せ.

(3) ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立なとき, $A\boldsymbol{u}_1$, $A\boldsymbol{u}_2$, $A\boldsymbol{u}_3$, $A\boldsymbol{u}_4$ も 1 次独立であることを示せ.

(愛媛大 2022) (m20224610)

0.290 文字 x と y に関する $n(\geq 1)$ 次同次式の全体を H_n とする，即ち

$H_n=\{f : x$ と y に関する多項式 $|$ 任意の定数 a に対して $f(ax,ay)=a^n f(x,y)\}$

(1) H_n は線形空間（ベクトル空間）になることを示せ.

(2) H_n の基底を 1 組与え，次元を求めよ.

文字 x と y に関する $n(\geq 1)$ 次同次対称式の全体を S_n とする，即ち

$$S_n=\{f\in H_n \mid f(x,y)=f(y,x)\}$$

(1) S_n は線形空間になることを示せ.

(2) S_n の基底を 1 組与え，次元を求めよ.

（一般の n でやる前に $n=1,\cdots,6$ の場合にやってみよ.）

(九州大 1996） (m19964703)

0.291 線形写像 $T:R^4\to R^2$ について

$$\mathrm{Ker}\ T=\{\ x\in R^4 \mid T(x)=0\ \}$$

$$\mathrm{Im}\ T=\{\ T(x) \mid x\in R^4\ \}$$

と定義する. T が条件

$$\mathrm{Ker}\ T=\left\{ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle|\ x_1+2x_3=x_2-x_4=0 \right\}$$

$$\mathrm{Im}\ T=R^2$$

を満足するとき，次の問に答えよ.

(1) Ker T の基底を 1 組求めよ.

(2) 上で求めた Ker T の基底を含む R^4 の基底を 1 組求めよ.

(3) $T(x) = Ax$ となる 2 行 4 列の行列 A を一個求めよ．

(4) 上の A について $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(九州大 1997）　(m19974705)

0.292 a_1 , a_2 , a_3 は一次独立なベクトルとする．

(1) 次は一次独立であるか．

(a) $b_1 = a_1 + a_3$, $b_2 = -a_1 + a_2 - 2a_3$, $b_3 = 2a_1 + a_2 + a_3$

(b) $c_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $c_2 = a_1 - 2a_2 + a_3$, $c_3 = a_1 + a_2 - a_3$

(2) a_1 , a_2 , a_3 を正規直交基底とするとき，(1) の (a) で与えられる b_1 , b_2 , b_3 によって張られる空間 W の正規直交基底を a_1 , a_2 , a_3 を用いてつくれ．

(九州大 1998）　(m19984708)

0.293 次の 4×4 型行列 A と，$\mathbf{R}^4$ のベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{0}$ について，以下の問に答えよ．ただし，行列 A の成分 a は実数の定数である．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ．

(2) x_1 , x_2 , x_3 , x_4 を未知数とする方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解を持つための a の条件を求めよ．

(3) 次の集合は $\mathbf{R}^4$ の部分線形空間となることを証明せよ．

$$V = \{\, \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} \ , \quad W = \{\, A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \,\}$$

(九州大 1998）　(m19984709)

0.294 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

について次の問に答えなさい．

(1) $\varphi(x) = Ax$ となる 3 次平方行列 A を求めなさい．

(2) A の行列式 $\det A$ を求めなさい．

(3) $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$\varphi(e)$ を求めなさい．

(4) $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい．

(5) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = 0\}$ とする．$\varphi(V) = \{\varphi(x) \,|\, x \in V\}$ は部分空間であることを示し，さらにその次元を求めなさい．

（九州大 2001）　(m20014706)

0.295 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられている．次の問に答えなさい．

(1) 4 次元複素ベクトル $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ に対し，

$$z^*Az = |z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_4|^2 + |z_4|^2$$

となることを示しなさい．ただし，$\overline{z_i}$ を z_i の共役複素数とするとき，$z^* = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}, \overline{z_4})$.

(2) 行列 A は正定値行列であることを示しなさい．

（九州大 2001） (m20014707)

0.296 n を 1 以上の整数とし, n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ の 1 次結合全体を $L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$ と表す. 線形写像

$$f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}] \longrightarrow f' \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$$

を T で表す．ただし f' は f の導関数である. 次の問に答えよ.

(1) n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ は 1 次独立であることを証明せよ.

(2) $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ を求め, それぞれの次元を求めよ．ここで, 記号 $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ はそれぞれ

$$\mathrm{Ker}(T) = \{f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}] \mid \text{恒等的に } Tf = 0\},$$
$$\mathrm{Im}(T) = \{Tf \mid f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]\}$$

を表す.

(九州大 2004) (m20044706)

0.297 $R[x]_n$ を x に関する高々n 次の実数係数の多項式全体とする.

(1) $U_n = \{p(x) \in R[x]_n \mid p(0) = 0\,,\ p'(0) = 0\}$
はベクトル空間になることを示せ．ただし，p' は p の導関数である.

(2) U_n の次元と, 一組の基底を求めよ.

(九州大 2005) (m20054707)

0.298 $\mathcal{P}$ を 3 次以下の実係数多項式のつくるベクトル空間とする．すなわち

$$\mathcal{P} = \{f \mid f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}\,,$$

$A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ を　$(Af)(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy - \frac{f'''(0)}{24}x^4$　と定める．

(1) A は線形写像であることを示し，$f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3,$ に対し $(Af_n)(x)$ を求めなさい．

(2) W の基底 f_0, f_1, f_2, f_3 に関する A の行列表示を求めなさい．

(3) A^4 を求めなさい．

(4) A は対角化不可能であることを示しなさい．

(九州大 2006) (m20064708)

0.299 A を $n\times\ n$ 実行列とする．V を n 実ベクトル $\boldsymbol{v}$ で

$$\lim_{m\to\infty} A^m\boldsymbol{v} = 0 \quad (m \text{ は自然数})$$

となるものの全体とする.

(1) V は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ.

(2) $n=3$ で

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -9/4 & 1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき，A の固有値は $-1,\ 2\pm\sqrt{2}$ であることを示せ.

(3) A が (2) で与えられるとき V を求めよ.

(九州大 2008) (m20084713)

0.300 線形写像 $T\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ay-az-w \\ ax+y-z-w \\ -x+y+az+2w \end{pmatrix}$$

を考える. ただし, a は実数である.

(1) ベクトル空間

$$R(T) = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(2) ベクトル空間

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad ; \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(九州大 2010) (m20104708)

0.301 ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ x_1-2x_2+3x_4=0\,,\ x_1-x_2+x_3+2x_4=0 \right\}$$

により定める.

(1) V は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

(2) V の基底を一組求めよ.

ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ 上の内積を, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に対し,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

により定める. V の直交補空間を

$$W = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \text{任意の } \boldsymbol{x} \in V \text{ に対し, } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \right\}$$

と定める.

(3) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ.

(4) W の正規直交基底を一組求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124712)

0.302 実数を成分とする n 次縦ベクトルのなす線形空間を $\mathbf{R^n}$ とし, $\mathbf{R^4}$ から $\mathbf{R^3}$ への写像 f を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 11x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

で定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{R^4}$ の任意のベクトル x に対して $f(x) = Ax$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) 写像 f が線形写像になることを証明せよ.

(3)
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{R^4} \mid f(x) = \mathbf{0}\},$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid \ x \in \mathbf{R^4}\}$$
がそれぞれ $\mathbf{R^4}, \mathbf{R^3}$ の線形部分空間になることを証明せよ. ただし, $\mathbf{0}$ は $\mathbf{R^3}$ の零ベクトルを表す.

(4) $\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034932)

0.303 実数体 R 上の線形空間 V の空でない部分集合 S が V の部分空間であるとは, 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ と任意のスカラー $\alpha \in R$ に対して,

$$(\text{イ})\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S, \qquad (\text{ロ})\ \alpha\boldsymbol{x} \in S$$

を満たすことである. 次の $V = R^3$ の部分集合が部分空間になるかどうかを調べ, 部分空間になるものについては, その次元と基底 1 組を求めよ.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \ ; \ x + y - z = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \ ; \ x + y - z \text{ は整数} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \ ; \ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\}.$$

(佐賀大 2004)　　(m20044934)

0.304　実数を成分とする 4 次縦（列）ベクトル全体のなす線形空間を $\boldsymbol{R}^4$ とし，4 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を V とするとき，次の問に答えよ.

(1)　V の次元と（1 組の）基底を求めよ.

(2)　次のベクトル　$\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$　が V に属するかどうかをそれぞれ判定せよ.

(3)　$\boldsymbol{R}^4$ の 2 つの部分空間の共通部分は，$\boldsymbol{R}^4$ の部分空間になることを証明せよ.

(4)　$\boldsymbol{a}_1, \ \boldsymbol{a}_2$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間と，$\boldsymbol{a}_3, \ \boldsymbol{a}_4$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間との共通部分の次元と基底を求めよ.

(佐賀大 2006)　　(m20064902)

0.305　3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2), \ \boldsymbol{b} = (4, 2, 1), \ \boldsymbol{c} = (0, 3, -1) \in \boldsymbol{R}^3$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2)　$\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c}$ から生成される部分空間 $W = \langle \ \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c} \ \rangle$ の次元 $\dim W$ は何か.

(佐賀大 2007)　　(m20074913)

0.306　3 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2), \ \boldsymbol{b} = (2, 1, 3) \in \boldsymbol{R}^3$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$\boldsymbol{c} = (1, -2, -1)$ について，$\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$ となる実数 p, q を求めよ.

(2)　$\boldsymbol{d} = (1, 2, 2)$ が $\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b} \rangle$ に含まれないことを示せ.

(3)　$\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c}, \ \boldsymbol{d}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{c}, \ \boldsymbol{d} \rangle$ の次元は何か.

(佐賀大 2009)　　(m20094908)

0.307　連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ の全体を W で表す. 以下の問いに答えよ.

(1)　W の次元と W の一組の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1 \, , \ \boldsymbol{u}_2\}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ は，W に含まれないことを示せ．

(3) $\boldsymbol{a}$ との距離 $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}||$ がもっとも近い W のベクトル $\boldsymbol{x}$ は，

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

で与えられることを示せ．ただし，一般に 4 次ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_4\end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{4}x_iy_i \qquad ||\boldsymbol{x}||=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$$

である．

(佐賀大 2009) (m20094920)

0.308 ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\in\boldsymbol{R}^3$ を次のようにおく．

$$\boldsymbol{a}=(1,2,-1),\ \boldsymbol{b}=(3,2,1),\ \boldsymbol{c}=(2,0,p),\ \boldsymbol{d}=(2,q,-2)$$

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が 1 次従属になるように p を定めよ．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{d}$ が直交するように q を定めよ．

(3) (1),(2) で定めた p,q の値について，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}$ から生成される部分空間 $W=\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\rangle$ の次元 $\dim W$ は何か．

(佐賀大 2014) (m20144917)

0.309 R を実数全体の集合とする．$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=(2,1,3),\ \boldsymbol{b}=(2,-2,4),\ \boldsymbol{c}=(0,3,-1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が一次独立であるか，または一次従属でるか，理由を含めて答えよ．

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ によって生成される部分空間を $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle$ とする．$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ が $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle$ に属するための条件を答えよ．

(佐賀大 2018) (m20184920)

0.310 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して，

$$V_i=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_i)=0\}\ (i=1,2),\qquad V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2,\ (\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R})\}$$

とするとき，次のことを示せ．ここに，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の内積を表す．

(1) V_1,V_2 は $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間である．

(2) $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\,|\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\ ({}^\forall\boldsymbol{y}\in V_1\cap V_2)\}$

（熊本大 2001） (m20015206)

0.311 線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で与えられているとき，次の問いに答えよ．

(1)　f の核の基底を求めよ.　　　(2) f の像の次元を求めよ.

(熊本大 2007)　　(m20075204)

0.312　3 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W を

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-2b \\ a+b \\ 3a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．このとき，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ が W の要素にならないための，c が満たすべき条件を求めよ.

(宮崎大 2009)　　(m20095301)

0.313　R^2 の以下の基底 $\{a_i\}$ から $\{b_i\}$ への基底変換の行列を求めよ.

$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,　$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　;　$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,　$b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(鹿児島大 2009)　　(m20095422)

0.314　以下のベクトル $\vec{v}$ の集合 V は，線形空間（ベクトル空間とも呼ぶ）である．V の次元と基底を求めよ.

$$V = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z, u \text{ は } \left\{ \begin{array}{c} x+2y+3z+u=0 \\ 2x+3y+z+2u=0 \\ 3x+5y+4z+3u=0 \\ x+y-2z+u=0 \end{array} \right. \text{ の解} \right\}$$

(香川大 2022)　　(m20225705)

0.315　$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$ を満たすもの全体の集合 W は $\boldsymbol{R}^n$ の線形部分空間となることを示し, その基底を一組求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055805)

0.316　次の問に答えよ.

(1)　次の連立 1 次方程式が解をもつような a, b の値を求めよ. また, その時の解も求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 12x_4 = a - 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = b + 2 \end{array} \right.$$

(2)　次の連立 1 次方程式が自明でない解をもつような a の値を求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{l} ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + ax_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2ax_4 = 0 \end{array} \right.$$

(3)　次の解空間の次元と 1 組の基を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^5 \,\middle|\, \begin{array}{c} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

(島根大 2005)　　(m20055810)

0.317 4 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ に対して，これらの 1 次結合の全体を $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ で表すことにする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合であるなら， $\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

とするとき，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5 \rangle$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2006)　　(m20065805)

0.318 4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を次のように定める：

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y - 3z + 2w = 0 \text{ であり，かつ } \quad 2x - y + z + w = 0 \text{ である．} \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ．　　(2) W の基底を一組求めよ．

(島根大 2007)　　(m20075803)

0.319 (1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 3 & a \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ．

(b) $V = \{ v \in \boldsymbol{R}^4 \mid Av = 0 \}$， $W = \{ Av \mid v \in \boldsymbol{R}^4 \}$ とおく．このとき，V は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間，W は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(c) (a) のとき，V, W の基底を一組ずつ求めよ．

(d) (a) のとき，$\{v_1,\ v_2\}$ を V の任意の基底とする．また，W の任意の基底 $\{w_1,\ w_2\}$ に対して，$v_3,\ v_4\ (\in \boldsymbol{R}^4)$ を

$$w_1 = Av_3 \ , \quad w_2 = Av_4$$

となるような任意のベクトルとする．このとき，$\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底であることを示せ．

(島根大 2008)　　(m20085801)

0.320 3 次縦ベクトル全体のなすベクトル空間を R^3 とする，

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とする. 線形写像 $f\ :\ R^3 \to R^3$ は, 次を満たすものとする.

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v_3}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}\}$ は R^3 の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}$ の 1 次結合で表せ.

(3) $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

(4) f の像の 1 組の基底を求めよ.

(5) f の核の次元を求めよ.

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値としてもつことを示せ.

(島根大 2010)　　(m20105801)

0.321 写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax^2 + 2y - 2z + w \\ x - y + z + bw + c - 2 \\ 2x + (d+1)yz - w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f が線形写像になり，かつ核の次元が 2 となる a, b, c, d の値を求めよ．

(島根大 2012)　　(m20125805)

0.322 次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする．

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ.

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5)$ と定める．このとき,

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ.

(b) f_A の核 $\mathrm{ker} f_A$ の基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ.

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v}) = B\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ.

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.323 $(3, 4)$ 型行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．このとき，次の問いに答えよ.

(1) f_A は線形写像であることを示せ.

(2) f_A の核 $\mathrm{Ker} f_A$ に属するベクトルをすべて求めよ.

(3) f_A の像 $f_A\left(\mathbb{R}^4\right)$ の基底を求めよ.

(4) $f_A(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ をすべて求めよ．もしそのような $\boldsymbol{y}$ が存在しない場合はその理由を述べよ.

(島根大 2014)　　(m20145801)

0.324 以下に現れる関数はすべて $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級とする．写像

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad f(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$$

と二変数関数 $g(u,v)$ の合成を $F = g \circ f$ と定める．このとき,

$$F(x,y) = (g \circ f)(x,y) = x$$

ならば，以下の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(島根大 2014)　　(m20145806)

0.325 次の問いにおいて V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$f : V \to V$ は線形写像とする．$\mathbb{R}$ は実数全体を表すものとする.

(1) ベクトル空間 V の次元 $\dim(V)$ の定義を述べよ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をベクトル空間 V のベクトルとする．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であるならば，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) 不等式 $\dim(V) \leq \dim\big(f(V)\big) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$ を示せ．ただし，$\mathrm{Ker}\, f$ は f の核である.

(島根大 2015)　　(m20155805)

0.326 (1) 3 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

とする．このとき,

(ア) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを示せ.

(イ) $\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(2) 実数上のベクトル空間 V の基底を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ とする．線形写像 $f : V \to V$ が次を満たすとき,

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_3) &= 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 \end{cases}$$

このとき,

(ウ) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ.

(エ) $f(W)=W$ を満たす V の 1 次元の部分空間 W をすべて求めよ.

(島根大 2016)　　(m20165801)

0.327 4 次実正方行列 B のすべての固有値は 0 であるとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) B^4 は零行列であることを示せ.

4 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間を $\mathbb{R}^4$ とする．$c \in \mathbb{R}^4$ は $B^3c \neq 0$ を満たすとし，$P = [\ c \quad Bc \quad B^2c \quad B^3c\ ]$ を $c,\ Bc,\ B^2c,\ B^3c$ をそれぞれ第 1，第 2，第 3，第 4 列にもつ 4 次実正方行列とする.

(2) $c,\ Bc,\ B^2c,\ B^3c$ は $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ.

(3) P は正則行列であることを示し，$P^{-1}BP$ を求めよ.

(島根大 2016)　　(m20165802)

0.328 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるような線形写像とする，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

(島根大 2017)　　(m20175804)

0.329 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - 3y + z = 0 \right\}$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ.

(2) W の次元を求めよ.

(3) $\boldsymbol{v}$ を W に属さない $\mathbb{R}^3$ のベクトルとし，$U = \{k\boldsymbol{v} \mid k \in \mathbb{R}\}$ とする．このとき，次が成り立つことを示せ.

$$W + U = \mathbb{R}^3, \qquad W \cap U = \{0\}$$

ただし，$W + U = \{\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \in W,\ \boldsymbol{u} \in U\}$ である.

(島根大 2017)　　(m20175805)

0.330 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．線形写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．また，$A = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5]$ を A の列ベクトルへの分割とする．すなわち，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．$W = \langle\, \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5 \,\rangle$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．次の問いに答えよ．

(1) $f_A(\mathbb{R}^5) = W = \langle\, \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5 \,\rangle$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ の中から，W を生成する最小個数のベクトルの組を 1 組求めよ．また，W の次元を述べよ．

(3) f_A の核 $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185804)

0.331 $V,\ W$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，$V_1,\ V_2$ を V の部分空間とする．　また f を V から W への線形写像とする．次の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f は V の零ベクトル 0_V を W の零ベクトル 0_W に写すことを示せ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間であることを示せ．

(3) $V_1 \cap V_2$ は V の部分空間であることを示せ．

(島根大 2018)　　(m20185805)

0.332 $V,\ U$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，f を V から U への線形写像とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f は単射であるとする．このとき，

(a) V のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立であるなら，$f(\boldsymbol{v}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{v}_k)$ も 1 次独立であることを示せ．

(b) $\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ が V の基底であっても $f(\boldsymbol{v}_1),\ \cdots,\ f(\boldsymbol{v}_k)$ は U の基底であるとは限らないことを示せ．

(島根大 2019)　　(m20195803)

0.333 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を次のように定める．

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x - y + z \\ 3x + y - 2z \end{pmatrix}$$

(a) f は線形写像であることを示せ．

(b) $f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195804)

0.334 $M(3,\ \mathbb{R})$ を 3 次実正方行列全体とする．また，

$$W = \left\{X \in M(3,\ \mathbb{R}) \ \middle|\ \mathrm{tr}(X) = 0\right\}$$

とする．ここで，$\mathrm{tr}(X)$ は X のトレースである．すなわち，$X = (x_{ij})$ とすると，

$\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ である．次の問いに答えよ．

(1) W は $M(3,\ \mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.

(2) W の基底を 1 組求め，その理由を述べよ.

(島根大 2020)　　(m20205804)

0.335 a を実数，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(X) = AX$$

と定める．f の核を $\mathrm{Ker}f$，像を $\mathrm{Im}f$ で表す．必要なら a による場合分けを行い，それぞれの場合に $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の次元を求めよ．さらに $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

(島根大 2020)　　(m20205805)

0.336 次のベクトルについて，下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ は 3 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ.

(2) $\vec{x}_1$ を正規化したベクトル $\vec{y}_1$ を求めよ

(3) $\vec{y}_1$, $\vec{x}_2$ の一次結合で，$\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$ となるベクトル $\vec{y}_2$ を求めよ．ただし，$\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1$ は $\vec{y}_2$ と $\vec{y}_1$ の内積を表し，$|\vec{y}_2| = 1$ とする.

(4) $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{x}_3$ の一次結合で，$\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = 0$ かつ $\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = 0$ となるベクトル $\vec{y}_3$ を求めよ．ただし，$|\vec{y}_3| = 1$ とする.

(宇都宮大 2022)　　(m20226102)

0.337 実ベクトルを空間 $\boldsymbol{R}^3$ において,$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合　$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \boldsymbol{R} \right\}$　を考える.

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ となることを示せ.

(2) V が $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(3) V の直交補空間を求めよ.

(はこだて未来大 2007)　　(m20076302)

0.338 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ で定まる線形写像　$f\ :\ R^3 \to R^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

(1) A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ.

(2) A の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ.

(3) A の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めよ.

(はこだて未来大 2014)　　(m20146301)

0.339 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f \ : \ R^4 \to R^3 \ , \qquad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) f の核 Ker(f) の基底を求めよ．

(3) f の像 Im(f) の基底を求めよ．

(はこだて未来大 2017)　　(m20176301)

0.340 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) A の核 Ker(f) の基底を求めよ．

(3) 行列 A とその転置 ${}^t\!A$ の積 $A\,{}^t\!A$ が対角化可能かどうか調べ，対角化可能なら $P^{-1}A\,{}^t\!AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ．

(はこだて未来大 2021)　　(m20216301)

0.341 i は虚数単位とする．3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1-i & 1+i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対し固有空間の基底を求めよ．

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能ならば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P と P^{-1} を求めよ．

(はこだて未来大 2022)　　(m20226301)